



Artículo de investigación científica y tecnológica

Diseño de actividades de modelación matemática para solucionar problemas reales de la función cuadrática

Design of mathematical modeling activities to solve real-world problems in the quadratic function

Ronald Pérez-Mojica ¹, Paula Andrea Osorio-Gutiérrez ²

Para citar este artículo: Pérez-Mojica R, Osorio-Gutiérrez, P. Diseño de actividades de modelación matemática para solucionar problemas reales de la función cuadrática. Praxis. 2025;21(2): xx-xx. <http://dx.doi.org/10.21676/23897856.5989>

Recibido en agosto 06 de 2024

Aceptado en diciembre 22 de 2024

Publicado en línea en mayo 02 de 2025

RESUMEN

El estudio y el uso de la modelación en el diseño de actividades para la enseñanza de conceptos matemáticos es un tema de interés para muchos investigadores porque permite a los estudiantes enfrentarse a problemas reales y solucionarlos a partir de modelos. Los mayores desafíos en este sentido se relacionan con la poca implementación de esta estrategia en el aula por parte de los profesores debido a la falta de conocimientos para la creación, el diseño y la aplicación de actividades donde intervenga la modelación. En consecuencia, este estudio tiene como objetivo proponer ejercicios centrados en la modelación matemática para solucionar problemas reales de la función cuadrática. Se llevó a cabo un análisis cualitativo interpretativo, basado en observaciones y entrevistas no estructuradas con doce alumnos de una institución en Soledad, Atlántico. Los resultados confirman que la modelación incide de manera positiva en la comprensión y la aplicación de conceptos matemáticos específicos en el contexto. De este modo se logró corregir dificultades asociadas a las barreras que enfrentan los estudiantes al resolver problemas reales con funciones cuadráticas y encontrar la conexión entre los modelos matemáticos y situaciones propias de su diario vivir.

Palabras clave: modelación matemática; situaciones de modelación; actividades de matemáticas con modelación; funciones cuadráticas; aprendizaje activo.

ABSTRACT

The study and use of modeling in the design of activities for the teaching of mathematical concepts is a topic of interest for many researchers because it allows students to confront real problems and solve them using models. The greatest challenges in this regard are related to the limited implementation of this strategy in the classroom by teachers due to a lack of knowledge for the creation, design, and application of activities involving modeling. Consequently, this study aims to propose exercises centered on mathematical modeling to solve real-world problems of the quadratic function. A qualitative interpretative analysis was carried out, based on observations and unstructured interviews with twelve students from an institution in Soledad, Atlántico. The results confirm that modeling has a positive impact on the understanding and application of specific mathematical concepts in the context. In this way, it was possible to correct difficulties associated with the barriers that students face when solving real-world problems with quadratic functions and to find the connection between mathematical models and situations from their daily lives.

Keywords: mathematical modeling; modeling situations; mathematics activities with modeling; quadratic functions; active learning.

1. Licenciado. Universidad Católica de Manizales, Manizales, Colombia. Correo: ronald.perez@ucm.edu.co - <https://orcid.org/0009-0002-7718-3709>

2. MSc. Universidad Católica de Manizales, Manizales, Colombia. Correo: posorio@ucm.edu.co - <https://orcid.org/0000-0003-4824-0292>

INTRODUCCIÓN

La modelación matemática es un proceso que permite representar y comprender fenómenos del mundo real a través de simulaciones. Según Solar *et al.* (2015), esta estrategia no solo fortalece habilidades cognitivas y promueve la creatividad, sino que también tiene aplicaciones prácticas en la resolución de problemas reales, fomenta la interdisciplinariedad y contribuye a una toma de decisiones más fundamentada y efectiva.

Rodríguez y Quiroz (2016) destacan varias razones fundamentales que respaldan el valor de la modelación en el aula. Una de ellas es que este enfoque educativo permite a los estudiantes aplicar los conceptos de las matemáticas a situaciones del mundo real, lo que les ayuda a comprender la utilidad y la importancia de dicha disciplina en su vida cotidiana. Por otro lado, Hitt y Quiroz (2017) y Varón (2022) reconocen el valor de esta herramienta que no solo mejora la comprensión de fundamentos matemáticos, sino que también desarrolla habilidades relevantes como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la creatividad y la preparación para enfrentar desafíos en el mundo real.

En este marco, resulta fundamental reconocer que el desarrollo de competencias matemáticas no se limita a la transmisión de contenidos, sino que debe promover la capacidad de los estudiantes para interpretar su realidad y tomar decisiones informadas en contextos auténticos. Como señalan García-Cuéllar, Rojas-Carvajal y Coronado (2024), “la competencia matemática refiere a la capacidad de utilizar el razonamiento matemático de manera efectiva en diversas situaciones, lo cual supone no solo el dominio de conceptos y procedimientos matemáticos, sino también la competencia para aplicarlos de manera adecuada y reflexiva en contextos reales” (p. 591). Esta visión coincide con el enfoque de la modelación matemática, al propiciar un aprendizaje significativo y contextualizado.

En este orden de ideas, al explorar la aplicación de las funciones cuadráticas para abordar problemas reales, surge la necesidad de analizar estrategias de modelación para fortalecer el aprendizaje. Biembengut (2004) y Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2022) han hallado que la experimentación en el aula con este enfoque mejora la comprensión y la asimilación de conceptos matemáticos al proporcionar experiencias concretas y visuales que complementan la enseñanza tradicional.

La experimentación de la modelación matemática en el aula

La comunidad académica ha realizado grandes aportes sobre la modelación, comprendiéndola como un proceso en la enseñanza de las matemáticas. La literatura ha demostrado que tanto a nivel internacional como al nacional se requiere una transformación didáctica que promueva desafíos en la solución de problemas (Coa y Obregón, 2023; Huincahue *et al.*, 2018; Mejía *et al.*, 2022), y en esa medida la modelación se ha consolidado como una estrategia pedagógica útil. De esta manera se evidencia la relevancia de diseñar actividades que permitan conectar los conceptos matemáticos con situaciones del mundo real (Ortiz y Mora, 2015).

De acuerdo con Huincahue *et al.* (2018), la modelación matemática es un proceso de traducción entre las matemáticas y el mundo real. Esta definición da cuenta de la función participativa del proceso, moviéndose entre el rol del estudiante y el del docente, que debe diseñar y construir tareas. Sin embargo, para implementar esta estrategia se requieren conocimientos matemáticos y didácticos; por lo tanto, los autores proponen cuatro dimensiones a partir de sus resultados en un curso desarrollado con este enfoque:

conceptos y creencias sobre la modelación matemática, componentes de la investigación sobre la modelación matemática, creación de actividades de modelación matemática y resolución.

Asimismo, Borromeo *et al.* (2014) presentan un modelo para la enseñanza mediante modelación matemática que contempla, entre otras dimensiones, el diseño de tareas. Esta propuesta se centra en potenciar el pensamiento crítico y la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes a través de actividades de modelación con problemas reales (Tabla 1).

Tabla 1. Modelo para la enseñanza de la modelación matemática.

Dimensión teórica	a) Ciclos de modelado
	b) Objetivos y perspectivas del modelado
	c) Tipos de tareas de modelado
Dimensión de la tarea	a) Solución múltiple de tareas de modelado
	b) Análisis cognitivos de tareas de modelado
	c) Desarrollo de tareas de modelado
Dimensión de instrucción	a) Planificación de lecciones con modelación de tareas
	b) Realización de lecciones con modelación de tareas
	c) Intervenciones, apoyo y retroalimentación
Dimensión diagnóstica	a) Reconocer fases en el proceso de modelado
	b) Reconocer dificultades y errores
	c) Marcar tareas de modelado

Fuente: elaboración propia, tomado de Guerrero-Ortiz y Borromeo (2022, p. 313).

La ejecución progresiva de tareas de modelación permite aumentar gradualmente la complejidad de las actividades, de manera que los estudiantes vayan fortaleciendo sus habilidades matemáticas y su comprensión conceptual. Así, Vanegas y Camelo (2018) destacan la efectividad de esta estrategia didáctica y su impacto significativo tanto en la comprensión de conceptos como en el desarrollo de habilidades para resolver problemas.

En suma, es claro que vincular los conceptos matemáticos con contextos reales mediante modelaciones permite identificar su relevancia y asimilarlos. De esta forma, los estudiantes no solo refuerzan su aprendizaje, sino que también desarrollan habilidades críticas esenciales para el éxito académico y profesional (Quiroz *et al.*, 2015). Por ejemplo, autores como Capacho y Mahecha (2021), Quiroz *et al.* (2015), Solar *et al.* (2015) y Zaldívar *et al.* (2017) sostienen que este enfoque fomenta la interdisciplinariedad al integrar conocimientos de diferentes áreas en la resolución de problemas, lo que lleva a comprender la conexión entre los distintos campos de la ciencia y su aplicación en el mundo real.

De igual forma, Ortiz y Mora (2015), en línea con lo hallado por Kaiser (2007), afirman que esta estrategia didáctica facilita que los alumnos perciban la importancia de las matemáticas en la resolución de problemas cotidianos dentro de su entorno.

Obstáculos y dificultades para emplear la modelación matemática en el aula

Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2022) observaron ciertas dificultades para la implementación de la modelación matemática por parte de los docentes. Estos problemas se relacionaron con la perspectiva de los educadores en cuanto a: 1) lo que se entiende por modelación; 2) el papel de la modelación en el aula; y 3) las características relevantes en las tareas de modelación matemática. A partir de estos hallazgos, los autores pudieron establecer elementos importantes asociados al aprendizaje de las matemáticas por medio de la resolución de problemas basados en el enfoque en cuestión. En consecuencia, reconocen la importancia de estudiar la evolución de las concepciones sobre el modelado y la enseñanza de las matemáticas en profesores en formación.

También, Almeida *et al.* (2022) emplearon la semiótica para analizar los contenidos de matemáticas en actividades propias de la modelación. Su trabajo halló que se requieren unas condiciones de diseño y planificación para el aprendizaje y el desarrollo de tareas que vinculen tanto al docente como al alumno en las prácticas de aula, de forma que este último comprenda el uso de diferentes representaciones y argumentaciones relacionadas al contenido matemático.

Por otro lado, Molina-Toro *et al.* (2018) manifiestan que, cuando los estudiantes participan de actividades basadas en la modelación, logran llegar a la experimentación empleando distintas herramientas, como gráficas, tecnología, entre otras. De tal modo se fomentan interacciones dinámicas, representaciones visuales conocidas y construcciones argumentativas relacionadas a problemas reales y del contexto.

Así las cosas, cabe reconocer, tal como lo hace Trigueros (2009), que el uso de modelos matemáticos no es una tarea fácil. Enseñar los conceptos de la modelación y a su vez los contenidos de la asignatura pueden ser muy complicado, pero es posible con actividades introductorias que permitan un aprendizaje conceptual sin interrumpir el proceso de la modelación. También es recomendable tener siempre presente el diseño de actividades a partir de un problema real, ya que esto facilita la participación de los estudiantes y el aprendizaje de nuevos conceptos.

En esta misma línea, autores como Maaß (2006) y Solar *et al.* (2015) destacan la relevancia de desarrollar competencias en modelación matemática. No obstante, varios estudios han identificado deficiencias en su implementación: por un lado, el diseño inadecuado de tareas basadas en problemas reales y su transición a la fase de validación de las soluciones; por otro, la argumentación insuficiente del profesorado en torno a las situaciones planteadas. En este contexto, resulta imprescindible que los docentes reciban formación específica y guíen a sus estudiantes en la integración cotidiana de la modelación matemática, con el objetivo de promover el desarrollo de conocimientos conceptuales y fortalecer las competencias asociadas a este proceso.

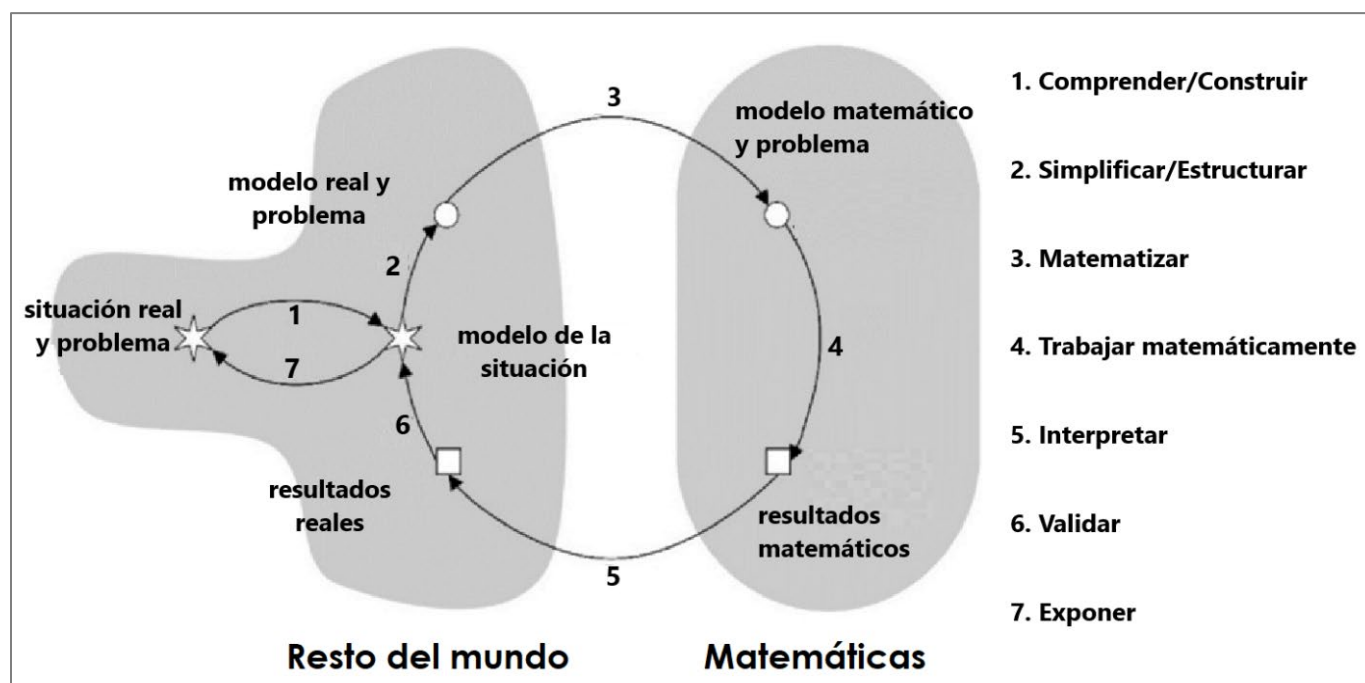
Soto (2020), asimismo, señala ciertas dificultades que enfrentan los docentes al diseñar actividades basadas en modelación, a pesar de su formación en la disciplina. La investigación sobre cómo manejar sus conocimientos sin una capacitación específica en el enfoque es escasa, por lo que en general se confía exclusivamente en el currículo escolar. De manera similar, Huincahue *et al.* (2018), Ortiz y Mora (2015), Rodríguez y Quiroz (2016) y Villa-Ochoa *et al.* (2018) coinciden en que el principal reto es plantear las tareas siguiendo fases como problematizar, interpretar, argumentar y exponer.

Otras investigaciones como la de los autores García-Cuellar *et al.* (2024) muestran la importancia de desarrollar modelos teóricos que implique articular de manera coherente y organizada las tareas que se llevan a cabo en el aula, a partir de una planificación se busca involucrar procesos matemáticos y no

matemáticos, con el fin de dinamizar la actividad matemática escolar y favorecer el aprendizaje en cada uno de los estudiantes.

El modelo de Blum y Leiß (2007) es un ciclo muy útil para el proceso de resolución de problemas matemáticos basados en la modelación matemática. Sus siete etapas proporcionan un marco estructurado para abordar problemas de manera sistemática, desde la comprensión inicial hasta la comunicación de los resultados. La figura 1 representa visualmente estas fases y la jerarquía propuesta por los autores.

Figura 1. Ciclo de modelación matemática Blum y Leiß (2007).



Fuente: (Blum 2015, p. 76).

Por otro lado, Borromeo (2010) ha contribuido a este enfoque al enfatizar en la importancia de la experimentación como parte integral del proceso de modelado. Su propuesta destaca la necesidad de que los estudiantes tomen parte en la exploración y el análisis de situaciones reales para construir modelos matemáticos que reflejen de manera precisa los fenómenos estudiados, como es el caso de las funciones cuadráticas.

La modelación matemática expuesta en los lineamientos curriculares

Las reformas curriculares actuales en Colombia se han centrado en competencias (Niss y Højgaard, 2011). Entre estas destrezas, la resolución de problemas se ha convertido en un foco de estudio importante de la investigación matemática actual, con miras a establecer pautas para estructurar grandes procesos propios de la disciplina (Deulofeu y Vilallonga, 2018).

Según los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (Mineducación, 1998), la competencia de modelación se refiere a la habilidad de los estudiantes para representar situaciones reales o problemas matemáticos de diversas maneras, ya sea mental, gestual o gráficamente, o mediante símbolos aritméticos o algebraicos. Esta destreza implica simplificar el fenómeno, seleccionar la forma de representación más adecuada y formular estrategias para resolverlo utilizando herramientas matemáticas.

Guerrero-Ortiz y Borromeo (2022) evidencian que la modelación potencia la transferencia de conceptos teóricos a contextos reales, fortalece el pensamiento crítico y la capacidad de resolución autónoma de problemas. En el marco de la educación básica y media en Colombia, este enfoque promueve asimismo el trabajo colaborativo y la metacognición, pilares esenciales para el desarrollo de competencias matemáticas profundas y duraderas.

METODOLOGÍA

Para el trabajo que da origen a este artículo se adoptó un enfoque cualitativo; específicamente, de tipo descriptivo e interpretativo. Según Hernández (2014), esta aproximación centra su importancia en comprender e interpretar fenómenos sociales desde la óptica de los participantes, con el objetivo de captar la complejidad y la riqueza de las experiencias humanas. Con ese fin, se emplearon técnicas de recolección de datos flexibles y sensibles al contexto, como las entrevistas semiestructuradas. Esta elección se fundamenta en la recomendación de Vargas (2011), quien destaca la utilidad de las entrevistas en profundidad para obtener perspectivas ricas y detalladas de los participantes.

Las categorías de análisis se centraron en dos aspectos principales: las estrategias de enseñanza y aprendizaje utilizadas en el contexto de la modelación matemática en el aula, y el diseño de actividades de este tipo por parte del docente.

Este estudio forma parte de una investigación amplia en la que se obtuvo información de un grupo de doce estudiantes de ciclo cuatro de la Institución Educativa Inobasol, en el municipio de Soledad- Atlántico. Estos alumnos recibieron un documento de consentimiento informado, y se les explicó el contenido del formato para su posterior diligenciamiento y firma, acreditando así la participación voluntaria en el trabajo.

Los instrumentos utilizados se propusieron de manera secuencial, buscando identificar dificultades en el momento de solucionar problemas con situaciones cuadráticas. Luego se brindó una orientación supervisada para reconocer los conceptos matemáticos abordados. Posteriormente, se diseñó y aplicó una propuesta escrita que corresponde a tres actividades basadas en el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007) para enseñar mediante modelación matemática. Asimismo, se contó con una observación participante y se llevó a cabo la entrevista semiestructurada a los estudiantes. Este enfoque, respaldado por Flick (2015), reconoce la importancia de la flexibilidad en estos diálogos para permitir que emerjan nuevos temas y perspectivas durante el proceso de investigación.

Los instrumentos se validaron mediante la evaluación de un experto o juez, quien analizó la pertinencia, la calidad y la validez de las actividades matemáticas diseñadas. De este modo se garantizó que los problemas propuestos fueran del contexto de los estudiantes y adecuados para representar el modelo y llegar a la solución

En cuanto a estructura, siguiendo el modelo de Blum y Leiß (2007), se contemplaron siete dimensiones como base para aplicar la modelación matemática: comprender/construir, simplificar/estructurar, matematizar, trabajar matemáticamente, interpretar, validar, y exponer. Cada una de ellas deriva de las observaciones de las prácticas y de las reflexiones de los estudiantes al aplicar las tres actividades que se diseñaron según la secuenciación propuesta por dichos autores.

La fase del diseño de actividades, es decir, de construcción de las guías, se enfocó en integrar situaciones del mundo real en el aprendizaje de las matemáticas, con especial énfasis en la modelación (Blum, 2015).

Para ese fin, se seleccionaron temas contextualizados y de interés para los estudiantes. El propósito, además de vincular las matemáticas en el entorno cotidiano de los participantes, fue facilitar la comprensión y la motivación intrínseca en el aprendizaje.

En el primer instrumento, que intentó evocar la expectativa que generan los parques de diversión en el mundo entero, se invitó a los participantes a elaborar un modelo matemático para entender la variación del precio de la boleta de entrada al lugar de entretenimiento. El segundo instrumento, por su parte, buscó analizar el costo del servicio de energía y, a su vez, concientizar sobre el uso racional del recurso. El tercer instrumento, entretanto, estuvo relacionado con la venta de celulares.

Este enfoque de modelación matemática subraya la importancia de desarrollar habilidades de pensamiento crítico y de aplicar conceptos matemáticos en contextos auténticos. La alineación de los instrumentos con el modelo del ciclo de Blum (2007) se manifiesta en cómo los estudiantes son motivados a reflexionar, analizar y tomar decisiones basadas en modelos matemáticos, así como a comprender la variación.

RESULTADOS

En consonancia con la visión de Blum (2015) sobre la aplicación de conceptos matemáticos en contextos significativos, los instrumentos diseñados requieren que los estudiantes utilicen funciones cuadráticas, coeficientes y modelos matemáticos para resolver problemas del mundo real. Esta aplicación les permite poner en práctica las nociones aprendidas en situaciones concretas.

Las tareas propuestas también involucran el análisis de variables *versus* tiempo, la demanda y los coeficientes que afectan los modelos utilizados. Así, promueven la comprensión de las variaciones en los valores y su impacto en el comportamiento de las funciones. Este entendimiento, de acuerdo con Villa-Ochoa *et al.* (2017), le brinda direccionalidad a la construcción de las actividades.

Con base en los resultados de la implementación del primer instrumento y considerando el objetivo establecido, se presenta el siguiente análisis en torno a la identificación de constantes en la función cuadrática, la habilidad para graficar dicha función y su representación en el plano cartesiano.

Análisis de la prueba inicial

Identificación de las constantes a , b y c en las funciones cuadráticas

Los estudiantes pertenecientes al ciclo electivo especial integrado (CLEI) contaban con modelos previos para dar solución a situaciones problema a partir de la comprensión de datos relevantes y la revisión de un algoritmo. Con esto en mente, se realizó una prueba diagnóstica, que consistió en determinar lo que los participantes conocían sobre las ecuaciones de segundo grado y el reconocimiento de la expresión algebraica.

Solo dos de doce estudiantes lograron identificar completamente las constantes en las funciones cuadráticas proporcionadas; otros dos apenas pudieron hacerlo en los dos primeros ejercicios, pero sin tener en cuenta el signo negativo que precedía a la constante c . En la tercera función, la mayoría de los participantes no identificaron la constante a cuando su valor era 1, lo que sugiere una falta de comprensión de la representación exacta de este término.

En general, los estudiantes mostraron dificultades para identificar la constante c en las funciones donde no estaba presente. No obstante, es importante recalcar que esta prueba diagnóstica no se enfocó en identificar un modelo previo de los estudiantes, sino en identificar conceptos claves para dar solución a problemas de la función cuadrática.

Comprensión de las funciones cuadráticas por parte de los estudiantes

Se observaron dificultades para interpretar y comprender las funciones cuadráticas, particularmente cuando faltaban términos como el lineal o independiente. Los estudiantes enfrentaron problemas para completar tablas de valores, realizar operaciones básicas y aplicar correctamente las reglas algebraicas, lo que afectó la evaluación de y y la correcta representación gráfica. En este caso, Lakoma (2007) sugiere reforzar la comprensión de estas funciones con actividades adicionales, mientras que Doerr (2007) destaca la importancia de la modelación matemática y la selección docente de situaciones relevantes para el aprendizaje contextualizado, como también lo proponen Zaldívar *et al.* (2017).

Siguiendo las recomendaciones de los autores anteriores, se elaboraron actividades basadas en la modelación que abordaron las dificultades identificadas en la comprensión de las funciones cuadráticas. Esta guía fue diseñada para brindar a los estudiantes un enfoque sistemático y práctico para mejorar su entendimiento de los conceptos clave y fortalecer sus habilidades para reconocer ese tipo de expresiones matemáticas, interpretarlas y aplicarlas en contextos relevantes.

Adicionalmente, se decidió incorporar estrategias pedagógicas recomendadas por autores como Bossio *et al.* (2021) y los ya citados Doerr (2007), Lakoma (2007) y Zaldívar *et al.* (2017) con el objetivo de fomentar un aprendizaje activo y participativo. Así, la implementación de una guía didáctica y de las tres actividades diseñadas a partir de la modelación matemática para el aula se consideraron como un recurso invaluable para superar las dificultades encontradas en la prueba diagnóstica, contribuyendo a mejorar la enseñanza de las funciones cuadráticas.

Guía didáctica para abordar los hallazgos de la prueba diagnóstica

Durante la actividad se destacó el compromiso de tres estudiantes, quienes mostraron un alto interés y gran participación en la discusión sobre las características de las funciones cuadráticas. Además, se notó una colaboración destacada entre los alumnos, como en los casos de Victoria y Luis, quienes estaban motivados para ayudar a Duván, que tenía dificultades para comprender las operaciones algebraicas y completar las tablas, así como a Ariela, que presentó problemas para ubicar los puntos en el plano cartesiano.

Este ambiente de aprendizaje colaborativo evidenció una comprensión más profunda de los conceptos y promovió un sentido de solidaridad y apoyo mutuo entre los estudiantes, lo que contribuyó significativamente al desarrollo de la actividad. Ahora bien, en primera instancia los participantes se centraron en comprender los aspectos teóricos y algebraicos de las funciones cuadráticas, sin explorar su relevancia en escenarios de la vida real. A pesar de esto, los esfuerzos del docente por clarificar los objetivos y la relevancia de los temas presentados tuvieron una incidencia significativa en el desarrollo de la actividad. Al respecto, es importante recordar que los tres diseños de tareas se enmarcaron en el modelo de Blum y Leiß (2007).

Actividad matemática 1: las matemáticas en el parque de diversiones

En el desarrollo de la primera actividad basada en modelación se estableció trabajar en grupos de tres a cuatro estudiantes. En el instrumento se abordó una situación real que, a través del análisis, se podía llevar a la matematización. A continuación, se presentan los hallazgos de la observación que se llevó a cabo durante el ejercicio, mientras los participantes abordaban las diferentes partes del problema propuesto, con base en las respuestas y las discusiones generadas por los grupos.

Reflexiones iniciales sobre el precio de las boletas

Las preguntas que iniciaron la puesta en marcha del primer instrumento fueron las siguientes:

- a. ¿Qué opinas sobre el precio de entrada a las atracciones?
- b. ¿Lo consideras costoso o accesible?
- c. ¿Qué precio sugerirías basándote en tu experiencia?

El grupo 1 expresó que el precio de entrada a las atracciones podía ser considerado accesible para algunos, pero costoso para otros, dependiendo de factores como el presupuesto disponible y la percepción de valor. Estos alumnos sugirieron que el precio ideal debería ser justo y equitativo para todos los visitantes, considerando la variedad de las atracciones ofrecidas por el parque.

El grupo 2, por su parte, argumentó que el precio era costoso para familias con ingresos más bajos y sugirieron que el parque podía ofrecer descuentos especiales o promociones para hacer la entrada más accesible. En relación con la pregunta c, el valor sugerido osciló entre los COP 15.000 y COP 50.000.

En general, se observó que los estudiantes se encontraban a la expectativa frente a la primera situación de la vida real. Las preguntas los hicieron sentir cómodos al no tener que hacer operaciones matemáticas para responder, y se notaron dispuestos a participar.

Variación del precio con el tiempo

Posteriormente, se utilizaron dos preguntas de forma auxiliar para ir modelando la situación en contexto: ¿qué sucede [con el precio de las boletas de entrada al parque de atracciones] cuando se acerca el final de la temporada? ¿El precio de las boletas aumenta o disminuye? La respuesta dada por todos los grupos fue, en esencia, la misma con base en la experiencia que cada uno había percibido: “Al final de la temporada los parques de diversiones son poco visitados, las personas le han perdido interés y las boletas están más económicas”.

Una vez fue claro que se había captado la atención de los estudiantes, se procedió a empezar la matematización de las situaciones descritas por los mismos estudiantes. Por lo tanto, teniendo en cuenta la forma general $P(x) = ax^2 + bx + c$ de la función cuadrática, se definió que $P(x)$ sería el precio de la boleta, x representaría el tiempo (días de temporada), los coeficientes a y b influirían en cómo variaría el precio a lo largo del tiempo, y c correspondería al valor de la boleta.

Las preguntas a continuación significaron el primer reto para la investigación, pues comenzaron el proceso de modelación matemática de la situación, que tenía variaciones marcadas por los valores asignados a las constantes a , b y c :

- a. ¿Cómo afectan los coeficientes a y b al comportamiento del precio de las boletas?

- b. ¿Qué valor de a nos mostraría un aumento en el precio de la boleta al finalizar la temporada?

El grupo 3, primero en participar, hizo la siguiente anotación: “Como lo normal es que el precio disminuya con el paso del tiempo, la línea de la parábola es hacia abajo después de estar en un precio alto”. Asimismo, estos estudiantes aseguraron que las guías (es decir, la actividad posterior al diagnóstico) les recordaba que, para que la parábola abriera hacia abajo, el valor del coeficiente a debía ser negativo, pero no sabían cuál efecto producía el valor de b .

Luego de esta intervención, un integrante del grupo 1 manifestó que, si b era negativo, la parábola se formaba desde el lado negativo de las x ; y si b era positivo la parábola podía verse formada al lado positivo de las x . Después de esta socialización, el resto de los grupos siguieron apoyando ambas teorías: la del grupo 3 y la del grupo 1.

Tu atracción favorita

Para dar continuidad a la actividad, se retomó con el siguiente interrogante para los estudiantes:

- a. ¿Cuál es tu atracción favorita en el parque de diversiones?

En este punto, cada grupo se manifestó según sus intereses. Una vez recuperado el interés de los estudiantes de este modo, se invitó a los alumnos a continuar el cuestionario:

- b. ¿Qué pasaría si el gestor del parque decidiera hacer apertura de su mejor atracción al final de la temporada?
 c. ¿Cómo afectaría esto a la modelación del precio de entrada?
 d. Describe como sería el valor de a para mostrar que el precio de la entrada aumentó.

La pregunta b fue resuelta por todos con el mismo argumento: si la atracción favorita se abría al final de la temporada, el interés de las personas en el parque aumentaría y el administrador aprovecharía para aumentar el precio en vez de dar promociones. Por lo demás, el interrogante c , cuya respuesta estaba intrínsecamente relacionada con la pregunta d , no fue interpretado por ninguno de los grupos debido a la resistencia que aún prevalecía entre los estudiantes en cuanto a interpretar matemáticamente una situación real (Molina-Toro *et al.*, 2018).

Por otro lado, la variación sufrida en la constante a fue indicada asertivamente: a aumentaba por encima de cero. Estas respuestas evidenciaron la claridad en el concepto de que $a > 0$ produce una parábola que abre hacia arriba.

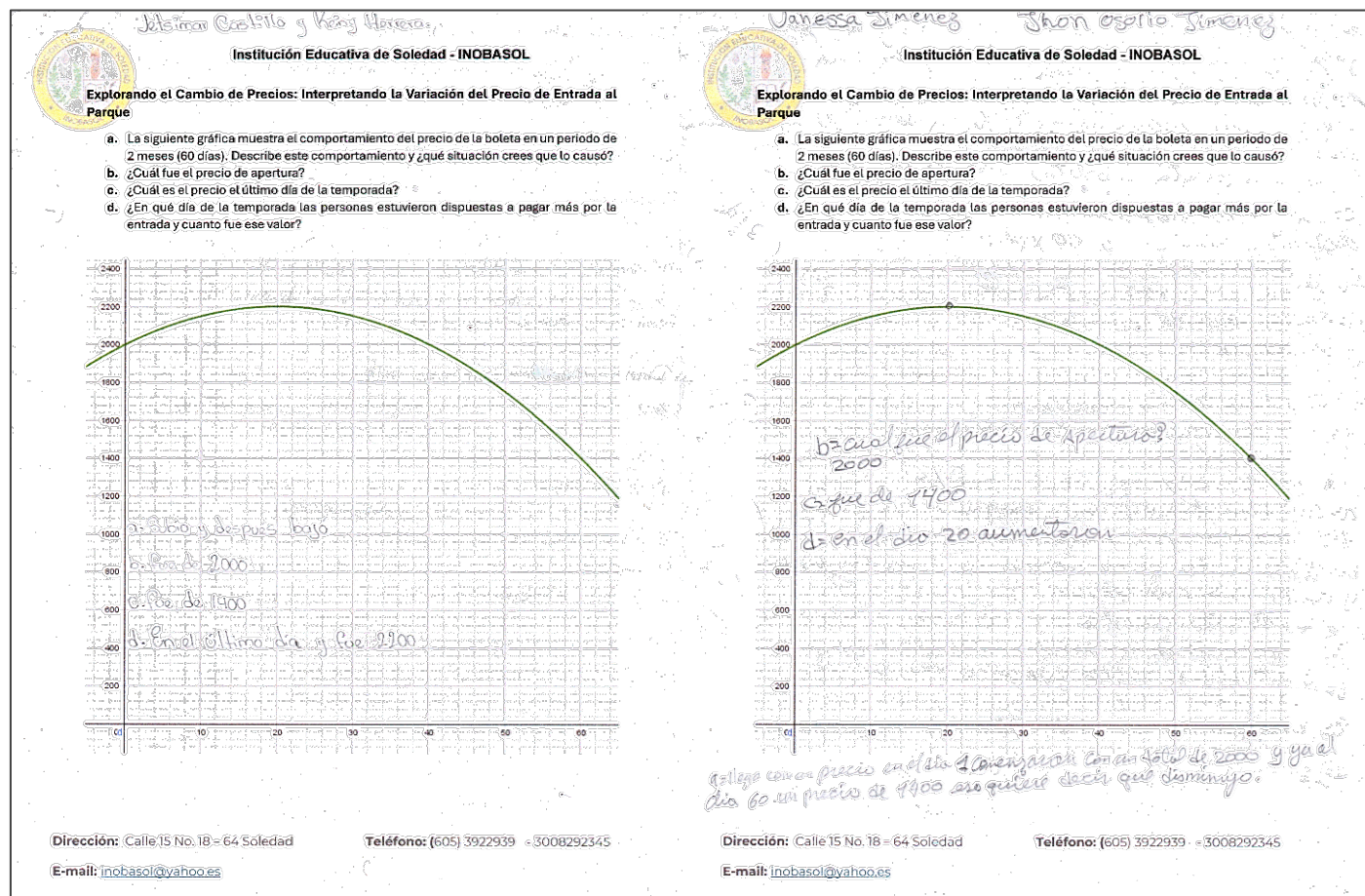
Explorando el cambio de precios: interpretando la variación del precio de entrada al parque

Esta parte del problema planteado invitó a analizar una situación que se presenta con poca frecuencia: cuando el parque de diversiones abre con un precio de entrada bajo y, luego de transcurrido cierto tiempo, aumenta el costo de la entrada para ir disminuyéndolo según finaliza la temporada. En este escenario, matematizado en una gráfica, no se suministró la función; solo se requirió interpretar la parábola en el plano cartesiano.

En general, los grupos se ubicaron en el plano cartesiano y describieron acertadamente la variación de precios. En principio, identificaron con exactitud el precio de apertura en COP 2.000 e interpretaron que el día veinte la boleta fue ofrecida al precio más alto de la temporada: COP 2.200, y que el día sesenta, de la

última función, el precio se encontró en COP 1.400. En la figura 2, que muestra las respuestas de los grupos 1 y 2, se observa que, pese a haber ubicado espacialmente los puntos en el plano, ninguno asoció una situación que hubiera provocado el comportamiento de la gráfica.

Figura 2. Sección “Explorando el cambio de precios”, respuestas de los grupos 1 y 2.



Fuente: elaboración propia.

Resultados de la actividad matemática 2: los cobros en los servicios de energía

Una vez concluyó la actividad “Las matemáticas en el parque de diversiones”, se solicitó a los estudiantes traer recibos de energía. Al preguntarles cómo interpretaban los cobros, la mayoría solo prestó atención al total por pagar, y tras indagar sobre la composición del monto y su cálculo coincidieron en que el costo del servicio dependía del consumo energético.

El grupo 3 mencionó que el consumo se determinaba a partir de las lecturas mensuales del contador, mientras que el grupo 1 señaló que las barras en la factura ilustraban el consumo mensual. El grupo 4, por su parte, identificó un cobro constante no relacionado con el consumo, y el grupo 2 expresó desconocer su origen.

Luego de validar cada aporte, el docente aclaró que el contador mide el consumo y que las barras son representaciones comparativas. Finalmente, se concluyó que el valor total de la factura incluye tanto el consumo en kilovatios por hora como los costos fijos; entre ellos, impuestos de alumbrado público y la tasa de seguridad ciudadana:

$$\text{Valor total} = \text{Consumo} * \text{valor kilovatio} + \text{impuestos fijos}.$$

Captura de datos: tabulación

Había dos formas tabular datos de consumo para el análisis:

1. Comparar los datos de un mes de todos los hogares.
2. Tomar un hogar en específico y revisar el consumo en varios periodos.

De todos los estudiantes, uno aportó varias facturas consecutivas que habían llegado a su casa, por lo que en consenso se determinó usar la opción 2. Dando continuidad a la actividad con la recolección de datos, se construyó de forma colectiva una tabla en la pizarra del salón para que todos pudieran observar simultáneamente la información, basada en varias facturas de energía de un mismo usuario en cuatro periodos consecutivos (Tabla 2).

Tabla 2. Tabulación de datos.

Impuestos		Lectura		Consumo (lect. final menos lect. inicial)	Valor facturado	Valor unitario kilovatio total Fact./Consumo
Alumbrado público	Tasa de seguridad ciudadana	Inicial	Final			
1.764	3.000	12.024	12.367	343	COP 261.310	761
1.764	3.000	12.367	12.743	376	COP 312.720	831
1.764	3.000	12.743	12.968	225	COP 133.400	592
1.764	3.000	12.968	13.225	257	COP 188.950	735

Fuente: elaboración propia.

Observación de variación en el precio del kilovatio

Durante la revisión de la tabla de datos, una estudiante del grupo 2 notó una variación en la última columna, que representaba el valor unitario del kilovatio en cada periodo. Para esta participante no era claro por qué, si todos los recibos eran de la casa de una misma compañera, la empresa cambiaba dicho monto todos los meses. A este interrogante agregó una reflexión personal: “Mi papá dice que, el mes en el que más consumimos, la empresa aumenta el precio del kilovatio”, y reconoció que nunca se había puesto a analizar el tema porque no lo entendía.

En respuesta a esta consulta, el docente explicó que la fluctuación en el precio del kilovatio está estrechamente vinculada al subsidio que recibe la comunidad perteneciente al estrato 1. Además, aclaró que su monto no es fijo, sino que se basa en un estudio que estima el consumo moderado de ese estrato. Si el consumo supera o se encuentra por debajo de dicho cálculo, el subsidio disminuye. Así, se observó que este mecanismo busca promover un uso responsable del recurso y por otro lado garantizar la sostenibilidad económica de la empresa proveedora.

Análisis y resultados de los planteamientos del problema 2

Para modelar de forma matemática el costo de la energía, se determinó que el precio del kilovatio estaba definido por:

$$p = 2x + 9 + \frac{c}{x}$$

Además, el valor neto por pagar estaba dado por:

$$N = x * p$$

Luego, se les formularon las siguientes preguntas a los estudiantes:

- Resuelve la ecuación del valor neto por pagar en función del kilovatio/hora, es decir, únicamente x .
- Lleva el resultado a la forma de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ identificando plenamente los valores de a , b y c .

En estas dos preguntas se buscaba que los estudiantes determinaran el valor de N en función de x y posteriormente transformaran la ecuación resultante en la forma estándar de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, identificando los valores específicos de a , b y c . Este proceso debería permitir una comprensión más profunda de la relación entre el costo de la energía y el precio del kilovatio/hora.

La figura 3 evidencia cómo los alumnos plantearon la solución. Los resultados, en efecto, mostraron una comprensión generalizada de las preguntas por parte de los estudiantes. Sin embargo, algunos enfrentaron dificultades para operar la expresión algebraica, situación que fue resuelta dentro del mismo grupo cuando un integrante que sí sabía les explicó a los otros. Este análisis refleja la importancia del trabajo en equipo y la colaboración entre los alumnos para abordar y resolver desafíos matemáticos complejos (Borssoi *et al.*, 2021; Tolentino-Quíñonez *et al.*, 2021).

Figura 3. Respuestas de los grupos 1, 2 y 3 al primer conjunto de preguntas.

Grupo 1

$$n(x) = (2x - 9 + \frac{c}{x})$$

$$n(x) = 2xx + 9x + \frac{xc}{x}$$

$$n(x) = 2x^2 + 9x + c$$

$$n(x) = 2x^2 + 9x + 4764x$$

Grupo 2

$$N(x) = x(-2x + 9 + \frac{c}{x})$$

$$N(x) = -2xx + 9x + \frac{xc}{x}$$

$$N(x) = -2x^2 + 9x + c$$

$$N(x) = -2x^2 + 9x + 4764$$

Grupo 3

Después de realizar las funciones cuadráticas de terminamos función es $A=2, b=9, c=4764$

$$N(x) = x(2x + 9 + \frac{c}{x})$$

$$N(x) = 2xx + 9x + x \cdot \frac{c}{x}$$

$$N(x) = 2x^2 + 9x + c$$

$$N(x) = 2x^2 + 9x + 4764$$

Fuente: elaboración propia.

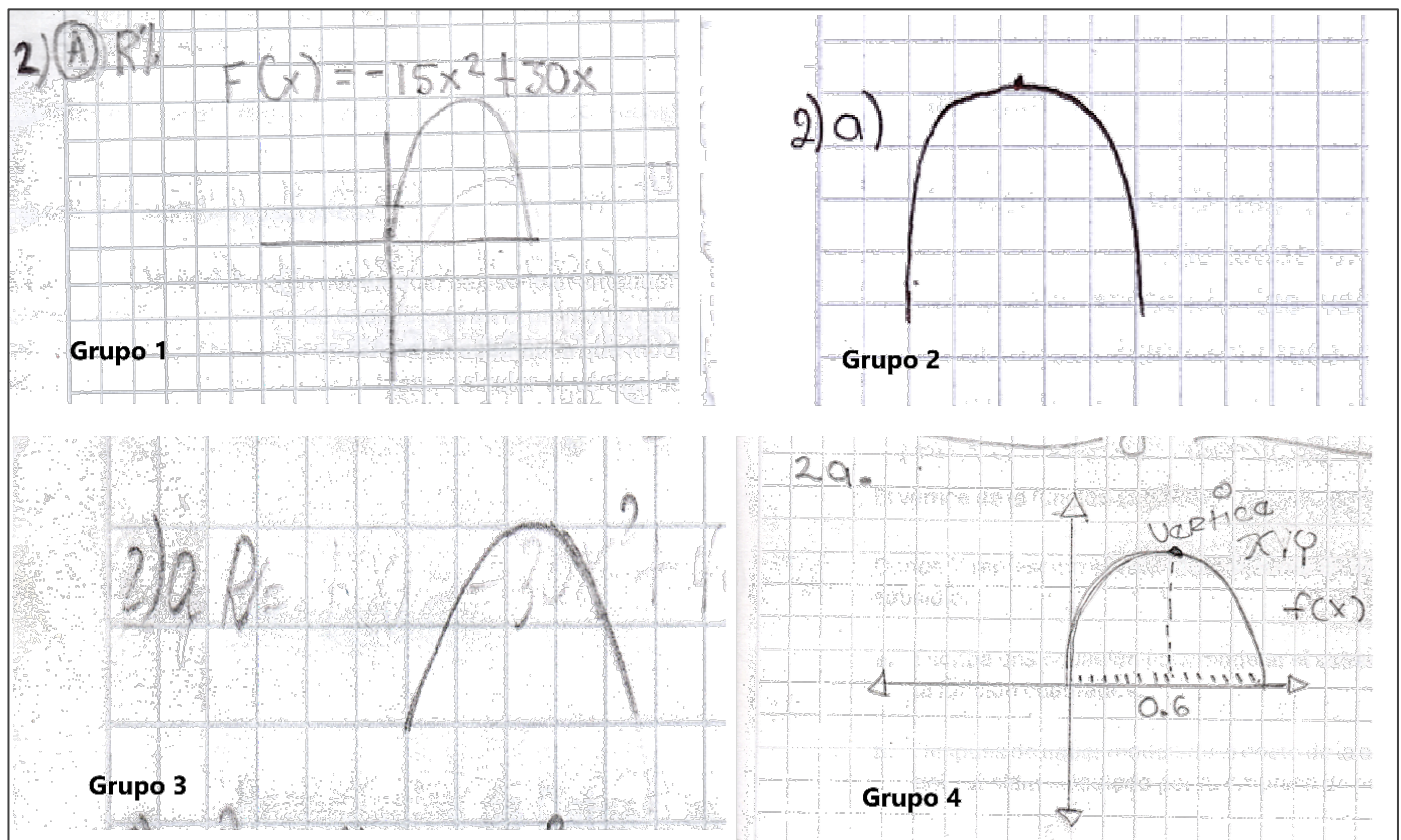
Para la siguiente actividad, los estudiantes fueron desafiados a trazar una gráfica del comportamiento del subsidio sin realizar cálculos directos, basándose en la siguiente contextualización proporcionada por la guía:

- A menor consumo: menor subsidio.
 - Consumo moderado (promedio general): subsidio máximo.
 - A mayor consumo: menor subsidio.
- a. Traza una gráfica (sin hacer cálculos) del comportamiento del subsidio conforme aumenta el consumo.
 - b. Después de haber modelado el costo de la energía, determina cuándo se alcanza el valor máximo del subsidio calculado por tu empresa de energía.

El propósito de esta actividad fue evaluar la capacidad de los estudiantes para comprender e interpretar las funciones cuadráticas en un contexto aplicado, dado que el costo de la energía estaba modelado mediante una expresión de ese tipo. En la figura 4 se presentan los gráficos elaborados por los grupos de trabajo, los cuales ilustran una relación entre el subsidio y el consumo de energía: a mayor consumo, menor es el subsidio. El punto máximo en la curva representa el consumo moderado, donde el subsidio alcanza su mayor valor.

Estas gráficas evidencian que los estudiantes lograron entender el comportamiento del subsidio en relación con el consumo. En esa medida, se reconoce la relevancia de las funciones cuadráticas para modelar fenómenos reales.

Figura 4. Gráficos del comportamiento del subsidio realizados por los grupos 1, 2, 3 y 4.



Fuente: elaboración propia.

Determinación del valor máximo del subsidio

Tras modelar el costo de la energía y representar gráficamente el comportamiento del subsidio, se incentivó a los estudiantes a identificar el punto en el que esta variable alcanzaba su valor máximo según los cálculos de la empresa de energía. En este momento solo un grupo logró interpretar correctamente la pregunta. Estos estudiantes se destacaron por identificar y dibujar el vértice en su gráfica, lo que les permitió comprender mejor lo que se les pedía y explicar lo que habían entendido al resto de la clase.

La actividad, en esencia, les brindó a los estudiantes la oportunidad de aplicar sus conocimientos sobre funciones cuadráticas y vértices de parábolas en un contexto práctico. De este modo se pudo evaluar tanto la comprensión del concepto como la capacidad para resolver problemas reales entre los participantes.

Preguntas para la reflexión y el compromiso

Para fomentar la reflexión y el compromiso respecto a la modelación matemática de una situación real cotidiana, se plantearon las siguientes preguntas:

- a. ¿Habías pensado alguna vez que el subsidio en el recibo de energía, y en general en todos los servicios públicos, no es un valor fijo y depende de tu consumo durante el mes?
- b. Después de haber comprendido y establecido mediante la modelación matemática el costo de la energía, ¿influye en tu conciencia sobre el uso adecuado de la energía?
- c. Escribe tu compromiso para un uso eficiente de la energía y cómo podrías asegurarte de que todos en tu hogar comprendan la importancia del consumo racional de este recurso. ¿Cómo planeas implementarlo?

Estas preguntas motivaron a los estudiantes a reflexionar sobre el funcionamiento de los subsidios en los servicios públicos y su impacto en la conciencia sobre el uso responsable de la energía. Además, promovieron el compromiso con prácticas de eficiencia energética en sus hogares, incentivando a que todos los miembros comprendan la importancia de adoptar un consumo energético adecuado.

Resultado de la actividad matemática 3: la venta de celulares

El tercer instrumento de evaluación estuvo centrado en resolver el problema de optimización de ingresos en la empresa de venta de celulares Tecno Móvil. Este ejercicio sirvió para dar seguimiento al proceso utilizado en las actividades previas.

Comprender/construir

En esta etapa, los estudiantes se familiarizaron con el problema presentado por la empresa Tecno Móvil y comprendieron la función de demanda proporcionada $q = 5.000 - 200p$. Así, entendieron que esta fórmula representa la relación entre el precio por unidad (p) y la cantidad de teléfonos vendidos por año (q).

Simplificar/estructurar

Los estudiantes simplificaron el problema identificando los elementos clave y estructurando la información proporcionada en la función de demanda. En este punto reconocieron que el objetivo era determinar el precio por unidad que maximizara los ingresos anuales de la empresa Tecno Móvil.

Trabajar matemáticamente

Los estudiantes trabajaron activamente en la resolución del problema, aplicando técnicas matemáticas para encontrar un precio por unidad que maximizara los ingresos anuales. Con el fin de determinar dicho valor, utilizaron la fórmula de ingresos anuales $I = p * q$ y buscaron el vértice de la función cuadrática. Así, los alumnos dieron respuesta a la siguiente pregunta:

- a. ¿Qué precio debe fijar Tecno Móvil para obtener los máximos ingresos anuales? Considera que, para ese propósito, se necesita encontrar el valor de p (precio) que produce el valor más alto de I (ingreso). Este proceso implica encontrar el vértice de la función cuadrática representada por la fórmula de ingresos anuales. Luego, con este resultado podrás darle una solución al gerente.

De este modo los participantes comprendieron el concepto del vértice y, al resolver la pregunta matemáticamente, determinaron el precio adecuado del ingreso máximo.

Interpretar

Una vez encontrada la solución matemática, los estudiantes interpretaron los resultados en el contexto del problema real. Por lo tanto, reflexionaron sobre la relación entre el precio, la cantidad vendida y los ingresos anuales, y tomaron decisiones informadas sobre el costo que se debía fijar para maximizar los ingresos de la empresa Tecno Móvil.

Validar

Los estudiantes validaron su solución matemática asegurándose de que fuera coherente y relevante para el problema planteado. Comprobaron que el valor calculado en efecto maximizaba los ingresos anuales de la empresa y que su modelo representaba con precisión la relación entre precio y cantidad de teléfonos vendidos. Sin embargo, confirmaron que la cifra obtenida no coincidía con el precio comercial actual de un celular, lo que reforzó su comprensión de la modelación matemática en situaciones reales.

Las preguntas de reflexión y conclusión les permitieron a los alumnos contextualizar de manera autónoma el valor comercial de un celular. A partir de esa situación, ajustaron los valores de a y b para modelar una nueva función matemática que se ajustara mejor a la realidad. A continuación, se presentan los interrogantes resueltos en esta etapa, cuyas respectivas respuestas se muestran en la figura 6.

- a. ¿El precio que maximiza los ingresos del negocio es parecido al precio actual de un celular? Determina junto al grupo según tu experiencia el valor de un celular.
- b. Si sabemos por definición que el vértice es $V = -\frac{b}{2a}$, ¿qué valores de a y b en esta fórmula nos acercan al precio real de un celular?
- c. Con los ajustes anteriores, escribe la función para modelar el ingreso real en la venta de celulares.

Figura 6. Registro fotográfico de interpretación de la solución del problema.

Grupo 2

$I = -31.200 + 62.500p$

3) a.

a.R = No porque el celular no vale doce coma cinco

b) $V = \frac{-b}{2a}$

$4.000.000 = \frac{-b}{2a}$

$4.000.000 = \frac{-8.000.000}{2(-1)}$

$4.000.000 = \frac{-8.000.000}{-2}$

$4.000.000 = 4.000.000$

$a = -1$

$b = 8.000.000$

c) $I = -p^2 + 8.000.000p$

R = Se Sustituyeron los Valores de a y b, para poder una ecuación justa.

Grupo 4

Reflexión y Conclusiones.

a. no porque en la vida real un celular no vale 12,5

b. $4.000.000 = \frac{-b}{2a}$

$4.000.000 = \frac{-8.000.000}{2(-1)}$

$4.000.000 = \frac{8.000.000}{2}$

$a = -1$

$b = 8.000.000$

c. Puntaje como A y B por $I = -p^2 + 8.000.000p$ y así lo ordenamos y queda una función Cuadrática.

Fuente: elaboración propia.

Exponer

Finalmente, los estudiantes comunicaron claramente al resto de la clase su solución al problema de optimización de ingresos. Explicaron el proceso seguido, sus resultados y las conclusiones de su análisis, evidenciando su comprensión de la modelación matemática en contextos reales. Este caso ilustra cómo dicho concepto puede integrarse eficazmente con situaciones cotidianas, desarrollando habilidades críticas y analíticas.

Cuestionario de preguntas abiertas sobre modelación matemática a los estudiantes

Como cierre del proceso, se seleccionó a tres estudiantes de forma aleatoria para responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo ayudó la modelación matemática a conectar conceptos matemáticos abstractos con situaciones de la vida real?
2. ¿Qué estrategias se utilizaron para traducir un caso del mundo real en un problema matemático que se pudiera resolver?
3. ¿Qué dificultades se encontraron al seleccionar y aplicar un modelo matemático para representar una situación concreta?
4. ¿Cómo se determinó si la solución matemática encontrada tenía sentido en el contexto del problema real que se estaba modelando?
5. ¿Qué aprendizajes se obtuvieron sobre la importancia de validar y comunicar los resultados al utilizar la modelación matemática en situaciones del mundo real?

Estas preguntas buscaban explorar cómo la modelación matemática les había ayudado a los participantes a conectar conceptos abstractos con situaciones de la vida real, así como las estrategias empleadas para traducir casos del mundo cotidiano en problemas matemáticos, las dificultades que enfrentaron al seleccionar y aplicar modelos matemáticos, cómo determinaron la validez de sus soluciones matemáticas en el contexto práctico, y lo que aprendieron sobre la importancia de validar y comunicar resultados. En la tabla 3 se presenta la interpretación de las respuestas proporcionadas por los estudiantes.

Tabla 3. Interpretación de las respuestas de tres estudiantes sobre modelación matemática en situaciones reales.

Estudiante	Conexión de conceptos matemáticos con situaciones reales	Estrategias para traducir problemas	Dificultades en la selección y aplicación de modelos matemáticos	Determinación de la solución matemática en contexto real	Importancia de validar y comunicar resultados
1	Gracias a las funciones, se pueden conectar conceptos de la vida real.	Leer el problema y resolver matemáticamente o mediante funciones.	Dificultad inicial con las funciones, pero se resolvía con concentración.	Depender de la función para tener una respuesta clara.	Importancia de las funciones para traducir problemas y encontrar resultados.
2	Ayuda a comprender temas específicos y realizar actividades de manera menos complicada.	Uso de números como principal estrategia para traducir problemas.	Dificultad inicial superada con la ayuda del profesor y compañeros.	Planteamiento de valores reales para validar la solución matemática.	Reconocimiento de la ubicuidad de las matemáticas y su importancia en diversas situaciones.
3	Permite representar situaciones de la vida real con funciones matemáticas.	Identificar elementos clave y representarlos mediante funciones.	Dificultad para seleccionar un modelo preciso y relevante para la situación.	Verificar si la solución produce resultados lógicos y coherentes.	Reconocimiento de la presencia de las matemáticas en situaciones cotidianas.

Fuente: elaboración propia.

Triangulación de los resultados vs. fases de modelación según Blum y Leiß

En la tabla 4 se muestra la convergencia entre las fases del modelo Blum y Leiß (2007) y los instrumentos utilizados en el proceso de aprendizaje. Se evidencia cómo se aplican las diferentes fases en tres hojas de trabajo distintas.

Tabla 4. Triangulación de los resultados vs. fases de modelación según Blum y Leiß.

Fases	Hoja de trabajo 1: Las matemáticas en el parque de diversiones	Hoja de trabajo 2: Los cobros en los servicios de energía	Hoja de trabajo 3: La venta de celulares
1. Comprender/construir	Los estudiantes comprenden la relación entre matemáticas y diversión al analizar el problema del parque de diversiones.	Identifican elementos clave y comprenden el proceso de lectura del contador y la factura de energía.	Se familiarizan con el problema de la empresa Tecno Móvil y comprenden la función de demanda.

Fases	Hoja de trabajo 1: Las matemáticas en el parque de diversiones	Hoja de trabajo 2: Los cobros en los servicios de energía	Hoja de trabajo 3: La venta de celulares
2. Simplificar/ estructurar	Simplifican el problema de las atracciones y organizan datos relevantes para el análisis.	Simplifican el proceso de lectura del contador y estructuran los componentes de la factura de energía.	Identifican los componentes clave de la función de demanda y estructuran la información.
3. Matematizar	Transforman el problema de las atracciones en cálculos matemáticos aplicados.	Utilizan fórmulas matemáticas para calcular el consumo y analizar la factura de energía.	Aplican la función de demanda para modelar la relación entre precio y cantidad vendida de teléfonos.
4. Trabajar matemáticamente	Resuelven problemas matemáticos relacionados con las atracciones del parque.	Interpretan datos de consumo y analizan facturas de energía.	Resuelven problemas de optimización de ingresos para Tecno Móvil.
5. Interpretar	Interpretan resultados matemáticos y los relacionan con el contexto del parque de diversiones.	Relacionan datos de consumo con patrones de facturación.	Interpretan resultados del análisis de la función de demanda y los relacionan con la estrategia de precios de Tecno Móvil.
6. Validar	Verifican que las soluciones matemáticas se ajusten al contexto y los datos proporcionados.	Validan análisis de facturas y consumo de energía para reflejar precisión.	Verifican que la estrategia de precios maximice los ingresos de Tecno Móvil.
7. Exponer	Presentan clara y efectivamente resultados y conclusiones al resto del grupo, lo que permite identificar aquellas dudas que necesitan retroalimentación.	Exponen análisis de facturas y consumo de energía al grupo, así como acciones efectivas para el uso racional de la energía eléctrica.	Exponen análisis de la función de demanda y la estrategia de precios de Tecno Móvil al grupo. Establecen el valor promedio comercial actual de un celular.

Fuente: elaboración propia.

DISCUSIÓN

Los resultados de esta investigación se suman a las evidencias que respaldan el uso de la modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de funciones cuadráticas. Aunque existen antecedentes en la literatura que abordan esta temática, aún son escasos los estudios que desarrollan y evalúan actividades diseñadas específicamente para contextos reales, integrando el ciclo de modelación de Blum y Leiß (2007) en niveles escolares básicos. En este sentido, el presente trabajo aporta un enfoque práctico y contextualizado que permite superar algunas de las barreras que enfrentan los docentes al momento de implementar tareas de modelación, especialmente cuando se inicia el tratamiento de este tipo de funciones matemáticas en el aula.

Por lo demás, los hallazgos del estudio coinciden con investigaciones previas que destacan el papel de la modelación en la comprensión de conceptos abstractos. Igualmente, los resultados validan la capacidad de este proceso para promover la aplicación práctica de dichas nociones en situaciones reales, lo que resulta clave para fortalecer el pensamiento matemático (Soto, 2020; Zaldívar *et al.*, 2017).

De igual forma, numerosos estudios subrayan la relevancia de contextualizar el aprendizaje matemático ya que esto permite a los estudiantes conectar la teoría con problemas de su vida cotidiana. Investigaciones de autores como Quiroz *et al.* (2015) y Mora y Ortiz (2015) señalan que la modelación fomenta una visión interdisciplinaria del conocimiento y ayuda a los alumnos a identificar la importancia de las matemáticas en diferentes áreas. Este enfoque, basado en la selección de temáticas de interés para los jóvenes, facilita una comprensión más profunda y significativa.

Los resultados también se alinean con las recomendaciones de las reformas curriculares en Colombia, las cuales hacen hincapié en la importancia de desarrollar competencias en modelación matemática (Mineducación, 1998). En ese orden de ideas, la habilidad de los estudiantes para representar y resolver problemas del mundo real mediante modelos se considera fundamental para su formación integral. Así, la presente investigación representa un aporte en ese ámbito al proporcionar un marco práctico para la implementación de estrategias pedagógicas que favorezcan el uso de la modelación en el aula. Ahora bien, a pesar de los beneficios identificados, este estudio también reveló algunos desafíos en la aplicación efectiva de ese procedimiento matemático en el entorno escolar.

En síntesis, los resultados de esta investigación refuerzan las conclusiones presentes en la literatura y dan cuenta de un enfoque contextualizado y práctico que puede ser replicado en distintos entornos educativos (tabla 5). Este proceso tiene el potencial de contribuir de manera significativa al avance en la enseñanza de las matemáticas, conectando la teoría con la práctica para dar solución a problemas reales.

Tabla 5. Triangulación de los resultados de la investigación con la literatura existente.

Aspecto	Resultados de la investigación	Literatura existente	Contribución
Modelación matemática y comprensión	La modelación matemática facilita la comprensión de conceptos abstractos y su aplicación en contextos reales.	Soto (2020) y Zaldívar <i>et al.</i> (2017): la modelación promueve el pensamiento matemático y el entendimiento conceptual.	El estudio reafirma que la modelación matemática es clave para desarrollar un pensamiento matemático sólido.
Contextualización del aprendizaje	La contextualización en el aprendizaje de las funciones cuadráticas permite conectar la teoría con la vida diaria.	Quiroz <i>et al.</i> (2015) y Ortiz y Mora (2015): la contextualización fomenta la interdisciplinariedad y la relevancia práctica.	El estudio valida que la contextualización mejora la comprensión y la percepción de la utilidad de las matemáticas.
Reformas curriculares y competencias	Se alinea con las reformas curriculares que promueven la modelación matemática en Colombia.	Mineducación (1998): las reformas promueven el desarrollo de competencias en modelación matemática.	La investigación apoya las directrices curriculares nacionales al ofrecer un marco práctico para la enseñanza de la modelación.
Desafíos en la implementación educativa	Los docentes enfrentan desafíos en la aplicación de la modelación debido a sus concepciones al respecto.	Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2022): las percepciones de los docentes influyen en la eficacia de la modelación.	El estudio contribuye a la formación continua de docentes, que resulta clave para maximizar los beneficios de la modelación matemática.

Fuente: elaboración propia.

CONCLUSIÓN

La modelación ha demostrado ser un proceso de enseñanza-aprendizaje fundamental para abordar problemas reales de las matemáticas y, en este caso particular, en las funciones cuadráticas. Gracias a esta estrategia, los estudiantes pueden aplicar conceptos teóricos en situaciones prácticas y significativas,

cumpliendo así el objetivo de implementar un enfoque didáctico centrado en la modelación matemática para resolver casos de la vida cotidiana.

Al caracterizar los elementos utilizados por los estudiantes en el proceso de modelación, se observó que recurrieron a la identificación de variables, la formulación de funciones y la interpretación de resultados. De esta forma, los ejercicios propuestos en la experiencia contribuyeron significativamente a la comprensión y el dominio de los conceptos matemáticos entre el alumnado. Además, la alineación de los instrumentos diseñados con esta estrategia se reflejó en la motivación de los participantes para reflexionar, analizar y tomar decisiones basadas en modelos matemáticos, así como a comprender la variación.

Erazo-Hurtado y Aldana-Bermúdez (2015) consideran que la contextualización del aprendizaje matemático no solo mejora la comprensión de los estudiantes, sino que también promueve un compromiso más profundo con el uso de esta disciplina en su vida diaria. Esta postura se alinea con los hallazgos del presente artículo, que demuestran cómo la modelación matemática fue relevante para lograr estos objetivos, especialmente al llevar a cabo las actividades diseñadas a partir del modelo elaborado por Blum (2007) para solucionar problemas reales relacionados a la función cuadrática.

En definitiva, se rescata que este trabajo de investigación propuso y aplicó una estrategia didáctica centrada en la modelación, a través de la cual se logró promover el interés de los estudiantes en el tema y mejorar su capacidad para resolver problemas reales del contexto. Mediante las actividades diseñadas de forma específica y las sesiones de trabajo que guiaron a los estudiantes en el proceso, se fomentaron su pensamiento crítico y su habilidad para aplicar conceptos matemáticos en situaciones auténticas.

RECOMENDACIÓN

Es importante promover la investigación continua en el campo de la modelación dentro del ámbito educativo, explorando nuevas estrategias y enfoques que puedan enriquecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos reales y significativos. De esta manera será posible seguir innovando en la enseñanza de la asignatura y potenciar el desarrollo académico de los estudiantes.

También es necesario aprender a diseñar proyectos de aula basados en la modelación matemática que involucren a los estudiantes en la resolución de problemas prácticos, promoviendo el trabajo en equipo, la comunicación efectiva, el pensamiento crítico y la interdisciplinariedad entre varias áreas del conocimiento. A su vez, es clave establecer un sistema de evaluación formativa que permita monitorear el progreso de los alumnos en este proceso e identificar áreas de mejora y retroalimentación oportuna para impulsar su aprendizaje.

DECLARACIÓN SOBRE CONFLICTO DE INTERÉS

Los autores manifiestan que durante la ejecución del trabajo o la redacción del artículo no han incidido intereses personales o ajenos a su voluntad, incluyendo malas conductas y valores distintos a los que usual y éticamente tiene la presente investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Almeida, L. M. W. de, Silva, K. A. P. da, y Brito, D. dos S. (2022). Interfaz didáctica entre la modelación matemática y la semiótica. *Bolema: Matemática, Educação e Tecnologia*, 36(73), 777-800. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08>
2. Biembengut, S., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125. <https://doi.org/10.24844/EM1602.06>
3. Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: Cho, S. (eds) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
4. Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling* (pp. 222-231). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
5. Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99-118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
6. Borromeo Ferri, R., Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J., Borba, M., Geiger, V., Stillman, G., English, L., Wake, G., Kaiser, G., y Kwon, O. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. *Proceedings of the 38th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 145-172. https://www.researchgate.net/publication/312368205_Mathematical_modeling_in_school_education_Mathematical_cognitive_curricular_instructional_and_teacher_education_perspectives
7. Borssoi, A., Silva, K., y Ferruzzi, E. (2021). Aprendizaje colaborativo en el contexto de una actividad de modelado matemático. *Bolema: Boletín de Educación Matemática*, 35(70), 937-958. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a17>
8. Bossio, J., Santa, Z., y Jaramillo López, C. M. (2023). Un análisis sobre las barreras de la modelación matemática en la práctica educativa del profesor de básica primaria. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 68, 255-285. <https://doi.org/10.35575/rvucn.n68a11>
9. Capacho, A., y Mahecha, A. (2021). Modelación matemática: Una apuesta educativa interdisciplinar desde el ambiente de aprendizaje STEM MD-Robotics hacia la toma de decisiones para la vida. *Uniminuto*. <https://repository.uniminuto.edu/handle/10656/14197>
10. Coa, R., y Obregón, J. (2023). Modelación matemática como estrategia didáctica: Una perspectiva procedimental de formación académica y científica. *Revista Docentes 2.0*, 16(2), 259-272. <https://doi.org/10.37843/rtd.v16i2.410>

11. Deulofeu, J., y Vilallonga Pons, J. (2018). Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. *Educatio Siglo XXI*, 36(3), 153-176. <https://doi.org/10.6018/j/349951>
12. Doerr, H. (2007). What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 69-78). Springer.
13. Erazo-Hurtado, J., y Aldana-Bermúdez, E. (2015). Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica. *Praxis*, 11(1), 163–169. <https://doi.org/10.21676/23897856.1562>
14. Flick, U. (2015). *Investigación cualitativa*. Fundación Paideia Galiza y Ediciones Morata.
15. García-Cuellar, D., Rojas-Carvajal, J., y Coronado, A. (2024). Desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes rurales: Una estrategia didáctica de aprendizaje. *Praxis*, 20(3), 585-601. <https://doi.org/10.21676/23897856.5948>
16. Guerrero-Ortiz, C., y Borromeo Ferri, R. (2022). Pre-service teachers' challenges in implementing mathematical modelling: Insights into reality. *PNA*, 16(4), 309-341. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329>
17. Guerrero-Ortiz, C., y Reyes-Rodríguez, A. (2022). Matices que dan forma a las concepciones sobre la modelación de futuros profesores. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 16(2), 48–61. <https://doi.org/10.54343/reiec.v16i2.311>
18. Hernández Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill Education.
19. Hitt, F., y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 153-177. <https://doi.org/10.17227/01203916.73rce151.175>
20. Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R., y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 36(1), 99-115. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.227>
21. Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling* (pp. 110-119). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.110>
22. Lakoma, E. (2007). Learning mathematical modelling-from the perspective of probability and statistics education. En W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, 10(36), 387-394. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_42

23. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? In ZDM - International Journal on Mathematics Education, 38(2), 113–142. Springer. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
24. Mejía, L., Gallo, C., y Quintana, D. (2022). La modelación matemática como estrategia didáctica para la resolución de problemas matemáticos. Horizontes: Revista de investigación en Ciencias de la Educación, 6(26), 2204–2218. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i26.485>
25. Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). Serie Lineamientos Curriculares. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf
26. Molina-Toro, J., Villa-Ochoa, J., y Suárez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación con graficación y tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11(1), 87-115. <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/506>
27. Niss, M., y Højgaard, T. (2011). Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark (Informe No. 485). IMFUFA, Roskilde University.
28. Ortiz, J., y Mora, A. (2014). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. Perspectiva Educacional, 54(1). <https://dx.doi.org/10.4151/07189729-Vol.54-Iss.1-Art.281>
29. Quiroz, S., Hitt, F., y Rodríguez, R. (2015). Évolution des conceptions de futurs enseignants du primaire sur la modélisation mathématique. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 20(20), 149–179. <https://doi.org/10.4000/adsc.2188>
30. Rodríguez, R., y Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. Educación Matemática, 28(3), 91–110. <https://doi.org/10.24844/em2803.04>
31. Solar, H., Deulofeu, J., y Azcárate, C. (2015). Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales. Enseñanza de las Ciencias, 33(2), 191-210. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1551>
32. Soto, D. (2020). Diseño de situaciones de modelación. UC Maule, (58), 107-139. <https://doi.org/10.29035/ucmaule.58.107>
33. Tolentino-Quiñones, H., Arauco-Mandujano, E. C., y Mandujano-Ponce, K. C. (2021). Aprendizaje autónomo en la educación de jóvenes y adultos. Revista Especial Multidisciplinar, 6(5-1), 31-43. <https://doi.org/10.33386/593dp.2021.5-1.706>
34. Trigueros Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Innovación Educativa, 9(46), 75-87. <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>

35. Vanegas, D. y Camelo-Bustos, F. (2018). Contribuciones al desarrollo del pensamiento crítico en prácticas de modelación matemática: Alzas en el SITP. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 211-233. <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/496>
36. Vargas, I. (2011). La entrevista en la investigación cualitativa: nuevas tendencias y retos. *Revista CAES*, 3(1), 125-133. <https://doi.org/10.1659-4703>
37. Varón, C. (2022). La modelación matemática en la resolución de problemas de variación cuadrática [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales]. RepoUAM. <https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/1360>
38. Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espacio Plural*, 18(36), 219-251.
39. Zaldívar, J. D., Quiroz, S., y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH*, 8(15), 87–110. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.63