Praxis 20 (3), 474-493

Decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas al integrar tecnología en la enseñanza del teorema de Pitágoras

Action decisions of the prospective mathematics teacher when integrating technology into the teaching of the Pythagorean theorem

Jaiber García-Morantes [1]
Miguel Ángel Moreno-Ramírez [2]
Angie Katherine Giraldo-Buitrago [3]
Juan Diego Gutiérrez-Correa [4]
Diego Garzón-Castro [5]

[1] Estudiante de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia. jaiber.garcia@correounivalle.edu.co
[2] Estudiante de maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia. miguel.angel.moreno@correounivalle.edu.co
[3] Estudiante de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia. angie.katherine.giraldo@correounivalle.edu.co
[4] Estudiante de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia. juan.gutierrez.correa@correounivalle.edu.co
[5] PhD. Universidad del Valle, Cali, Colombia. Correo electrónico: diego.garzon@correounivalle.edu.co

Recibido: 24 de mayo de 2024
Aceptado: 13 de julio de 2024
Publicado en línea: 28 de noviembre de 2024

Editor: Matilde Bolaño García

Praxis

Para citar este artículo: García-Morantes, J., Moreno-Ramírez, M., Giraldo Buitrago, A. K., Gutiérrez-Correa, J. D., y Garzón Castro, D. (2024). Decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas al integrar tecnología en la enseñanza del teorema de Pitágoras. *Praxis, 20 (3),* 474-493.

DOI: http://dx.doi.org/10.21676/23897856.5914

RESUMEN

Este estudio tuvo como propósito analizar las decisiones de acción de un futuro profesor de matemáticas al integrar tecnología mediante momentos con Oportunidades pedagógicas Matemáticamente significativas para aprovechar el Pensamiento del Estudiante, cuando implementa una clase sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras con 22 estudiantes de noveno grado. La metodología adoptada fue cualitativa, la estrategia de investigación un estudio de caso y el modelo de análisis, para dar cuenta de las interacciones de clase, consideró tres fases: se reconocieron episodios de referencia en la intervención del profesor según los objetivos de su planificación, se caracterizaron oportunidades pedagógicas en los episodios de referencia y se analizaron los invariantes en las oportunidades pedagógicas que permitieron describir las decisiones de acción del profesor. Los resultados indicaron que las decisiones de acción del profesor se destacan por aprovechar las discusiones matemáticas a través de preguntas, justificaciones, el uso de ideas matemáticas de los estudiantes y recursos tecnológicos para enriquecer significados. Lo que llevó a concluir que es importante estudiar las prácticas del futuro profesor para establecer lineamientos que configuran su desarrollo profesional a través del uso de recursos innovadores y la toma de decisiones situadas.

Palabras clave: decisiones de acción; pensamiento matemático; oportunidad pedagógica; teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

The purpose of this research was to analyze the action decisions of a prospective mathematics teacher when integrating technology through moments with Mathematically significant pedagogical Opportunities to build on Student Thinking, when implementing a class on the teaching of the Pythagorean Theorem with 22 ninth grade students. The methodology adopted was qualitative, the research strategy a case study and the analysis model, to account for classroom interactions, considered three phases: reference episodes were recognized in the teacher's intervention according to the objectives of his planning, pedagogical opportunities were characterized in the reference episodes and the invariants in the pedagogical opportunities that allowed describing the teacher's action decisions were analyzed. The results indicated that the teacher's action decisions stand out for taking advantage of mathematical discussions based on questions, justifications, the use of the student's mathematical ideas, and technological resources to enrich meanings. This led to the conclusion that it is important to study the practices of the prospective teacher to establish guidelines that shape their professional development based on the use of innovative resources and situated decision making.

Keywords: action decisions; mathematical thinking; pedagogical opportunity; Pythagorean theorem.

INTRODUCCIÓN

En la formación del futuro profesor de matemáticas existen tensiones entre la relación teoría y práctica que condiciona las formas de percibir la enseñanza, dado que se considera la aplicación de teorías aisladas de la práctica sin dar lugar a articulaciones integradoras y continuas (Oonk *et al*., 2015; Esquea-Gamero, 2017).

En ese sentido, surge la necesidad de crear escenarios de formación para el desarrollo de competencias profesionales coherentes con la expresión matemática del estudiante. Es decir, la práctica en el aula de clases del futuro profesor es una dimensión crucial en los programas de formación profesional, debido a que lo acerca a las dinámicas y complejidades de la escuela, y le permite contrastar la realidad escolar con el cúmulo de saberes adquiridos a lo largo de su formación. Es así como, es importante examinar el uso que el futuro profesor de matemáticas hace del conocimiento profesional con el propósito de cualificar su práctica de enseñanza en el aula (Llinares, 2023; Fernández *et al*., 2022).

Con ese orden de ideas, estudios sobre las prácticas de los futuros profesores de matemáticas han destacado la importancia de cualificar habilidades situadas (identificar, interpretar y decidir) que dan cuenta de la mirada profesional durante la reflexión de las interacciones con los estudiantes (Jacobs *et al*., 2010; Jacobs *et al*., 2022). En particular, se reconocen las decisiones de acción del profesor que dilucidan las oportunidades pedagógicas que son aprovechadas en el aula en respuesta al pensamiento matemático del estudiante (Jacobs *et al*., 2016; Garzón, 2017).

Concretamente, se definen las decisiones de acción durante las interacciones como un proceso vinculado con la gestión de clase y la respuesta inmediata que el profesor da a las ideas matemáticas del estudiante (Garzón, 2017). Una decisión de acción se considera como un proceso, debido a que el profesor evalúa múltiples opciones y elige una acción específica en respuesta a las circunstancias presentes en el aula con base a metas, creencias y conocimientos (Schoenfeld, 2008).

Para dar cuenta de lo anterior, se considera la aproximación teórica oportunidades pedagógicas matemáticamente significativas para aprovechar el pensamiento del estudiante. La cual se define como la intersección determinada por tres características: el pensamiento matemático del estudiante, lo significativo desde una perspectiva matemática y la oportunidad pedagógica (Leatham *et al*., 2015). Esta aproximación se ha seleccionado debido a que Garzón (2017) redujo la conceptualización de la mirada profesional de la enseñanza de las matemáticas a la aproximación de teoría de las oportunidades pedagógicas matemáticamente significativas, articulando las decisiones de acción del futuro profesor y el aprovechamiento del pensamiento matemático del estudiante.

En ese sentido, el pensamiento matemático del estudiante es determinado por medio de un conjunto de acciones observables y conectadas. Las acciones del estudiante deben estar relacionadas con una idea matemática subyacente.

Por lo tanto, el observador puede establecer si las acciones del estudiante permiten inferir sus matemáticas y si la idea matemática que subyace está articulada con las matemáticas que se infieren de las acciones del estudiante (Leatham *et al*., 2015; Garzón, 2017).

Lo significativo desde la perspectiva matemática se determina cuando el observador reconoce las acciones del profesor, en respuesta al pensamiento matemático del estudiante, tienen nexos con los referentes curriculares y los objetivos propuestos para la clase (Leatham *et al*., 2015; Garzón, 2017).

La oportunidad pedagógica se presenta cuando el observador examina la expresión matemática del estudiante, en la que se reconoce el pensamiento matemático que da cuenta de su manifestación y la construcción de significado respecto a la perspectiva matemática. Es decir, el observador establece si es posible reconocer, en las matemáticas del estudiante, la necesidad intelectual que otorga sentido a sus acciones (Harel, 2013). Además, el observador establece si el futuro profesor aprovecha la necesidad que se hace explícita para enriquecer los significados matemáticos de los estudiantes (Leatham *et al*., 2015; Garzón, 2017).

Con base a lo anterior, identificar el pensamiento matemático del estudiante se asocia con describir las acciones y las matemáticas del estudiante. Interpretar se focaliza en la articulación entre lo particular de una situación que se relaciona con lo curricular y las metas de aprendizaje, es decir, con lo significativo desde una perspectiva matemática. Y decidir se asocia con el aprovechamiento que el profesor hace de las discusiones matemáticas durante la oportunidad pedagógica (Garzón, 2017).

Otro asunto por considerar en la práctica del profesor es el uso de los recursos curriculares digitales, pues se ha reportado que los recursos inciden en la toma de decisiones cuando se planifica una lección (Cumbal *et al.,* 2023). Sin embargo, existen limitaciones en las investigaciones sobre los nexos entre el uso de los recursos tecnológicos y las decisiones de acción del profesor en el aula (Venturini y Sinclair, 2017). Por lo tanto, es importante analizar las capacidades de diseño y el uso de elementos tecnológicos que propicien una innovación educativa en las prácticas de aula (Wallin y Amador, 2018; Peña-Coronado y Cano-Velásquez, 2023).

Es así como, este artículo pretende atender a la pregunta ¿Cómo se caracterizan las decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas, al integrar tecnología en la práctica profesional, cuando aprovecha el pensamiento matemático del estudiante? Para atender dicha pregunta el objetivo que se establece para el estudio es analizar las decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas al integrar tecnología mediante momentos de enseñanza con oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

METODOLOGÍA

Esta investigación adoptó una aproximación cualitativa con un enfoque interaccionista para analizar las prácticas del futuro profesor en el aula de clases. La estrategia investigativa fue el estudio de caso (Yin, 2009) y el tratamiento de los datos provenientes de registros de video siguió un razonamiento inductivo usando codificación abierta y axial (Teppo, 2015). Es decir, los análisis se centraron en reconocer patrones de conducta particulares del profesor hasta llegar a tendencias de conducta generales relacionadas con decisiones de acción en respuesta al pensamiento matemático del estudiante.

Contexto y participantes

Los participantes fueron un futuro profesor de matemáticas (en adelante James), el cual intervenía en un aula de clases por primera vez, y veintidós estudiantes de grado noveno con una edad promedio de quince años. El estudio se desarrolló en el transcurso de una asignatura de formación profesional que propuso un espacio donde James planificó una propuesta de enseñanza, implementó la propuesta en una Institución Educativa oficial de Cali, Colombia y culminó su actividad reflexionando sobre la sistematización de sus prácticas. El objetivo del curso fue fortalecer la mirada profesional mediante el desarrollo de habilidades como la toma de decisiones situadas.

La propuesta de planificación de James tuvo como temática la enseñanza de la distancia entre dos puntos aplicando el teorema de Pitágoras y las proyecciones ortogonales, y siguió los parámetros de construcción de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar (Cárcamo y Fuentealba, 2023). Es decir, James seleccionó como progresión de aprendizaje los niveles que propone la heurística de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999), definió la meta de aprendizaje[3] y el concepto matemático, realizó una revisión de estudios relacionados con el concepto e indagó sobre material curricular que incluye el concepto de interés para guiar la adaptación de los recursos tecnológicos.

A continuación, se presentan dos diseños propuestos por James que en el marco de esta investigación se usaron como recursos. La figura 1

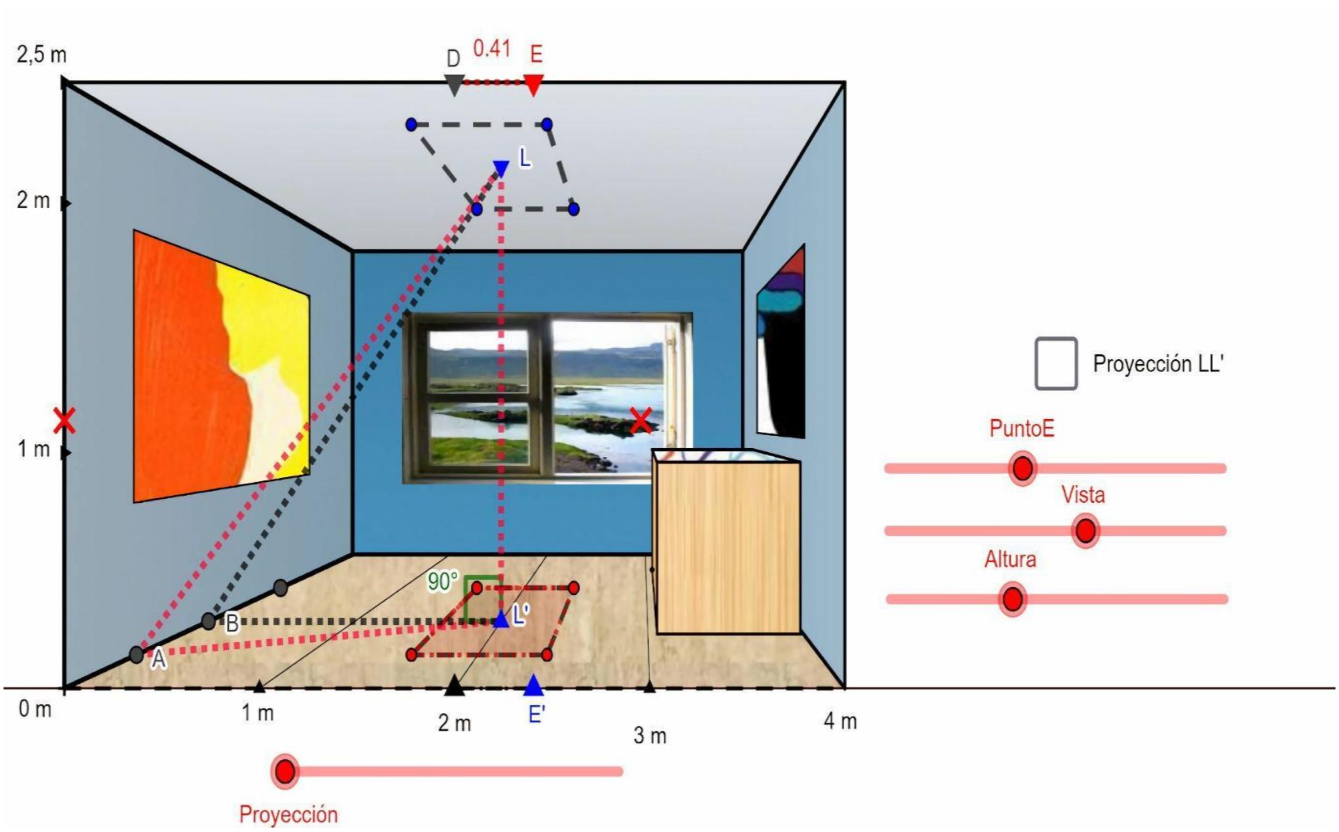
[3] La meta de aprendizaje consistió en aplicar el teorema de Pitágoras en un ambiente de geometría dinámica que involucra proyecciones ortogonales para calcular la distancia entre dos puntos.

presenta la adaptación de una habitación usando geometría proyectiva que en la propuesta fue denominada "habitación de Marina".

En el interior de la habitación se construyó un triángulo rectángulo ALL' que modelaba la distancia entre los puntos AL, AL' y LL'. A los costados se situaron deslizadores por medio de los cuales los estudiantes pudieron interactuar con las vistas del recurso y las proyecciones del punto L hasta L'.

El propósito de este recurso fue identificar las propiedades de los triángulos rectángulos que daban indicios sobre el origen de un nuevo sistema de coordenadas en el techo de la habitación que permitía determinar las dimensiones de la lámpara que se deseaba instalar.

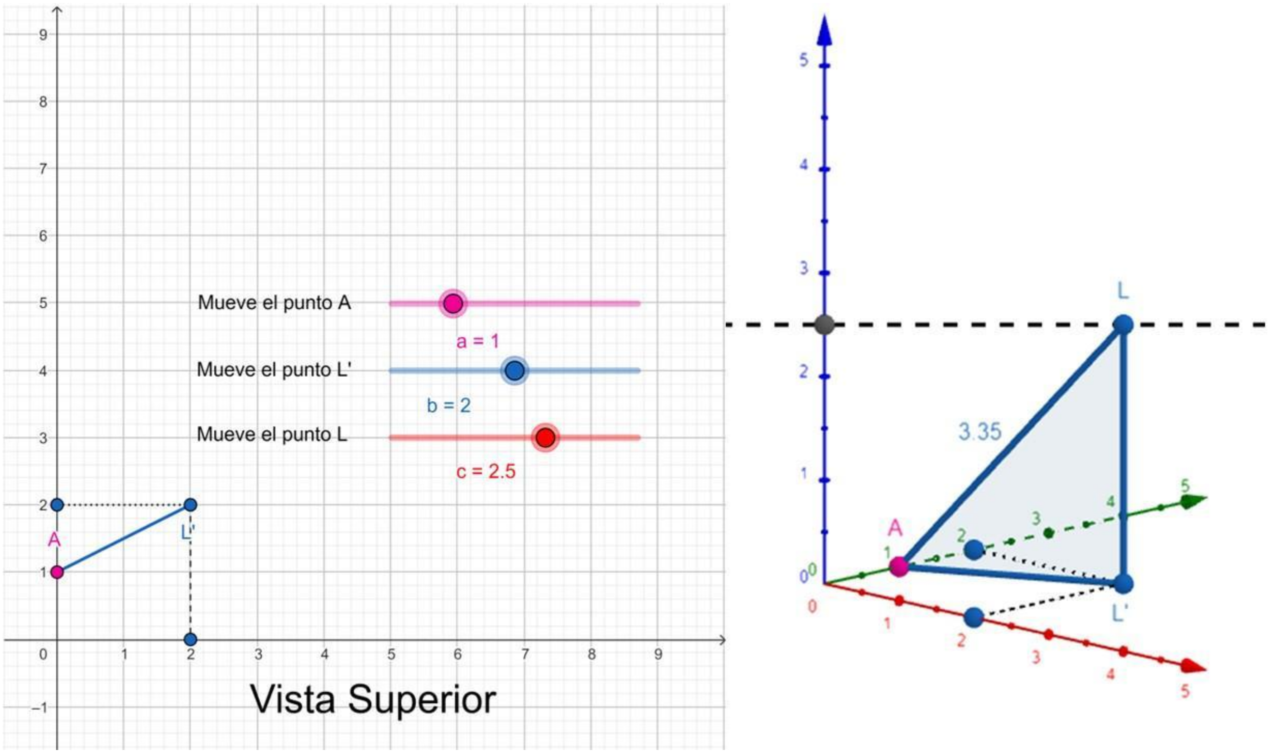
Figura 1. Habitación de Marina.



Fuente: recuperado de los diseños adaptados por James.

La figura 2 muestra un diseño que se basó en la coordinación entre la representación en el plano cartesiano y en el espacio de la situación problema, pero la perspectiva que se proyecta en el plano cartesiano está dada desde la vista superior de la habitación. El propósito de este diseño fue reconocer relaciones entre las vistas del plano y el espacio que modelan la situación problema.

Figura 2. Coordinación entre representaciones de las perspectivas.



Fuente: recuperado de los diseños adaptados por James.

Recolección y preparación de los datos

Se registraron tres horas en formato de video que abarcaron tres sesiones de clase. La videograbación de las sesiones de clase fue el instrumento para la recolección de los datos (Sherin y van Es 2008). Además, la técnica para la preparación de los datos fue la transcripción, para la cual se utilizó la siguiente nomenclatura:

- Para designar el estudiante que participó se usó E1, E2, …, E(n).
- Si no se identificaba cual era el estudiante que participó, pero se escuchaba el audio de su intervención se usó "EN" (estudiante no identificado).
- Si participaban más de tres estudiantes al tiempo se usó "E" (algunos o todos los estudiantes).
- Cuando lo dicho por los participantes fue inaudible se usó (...).
- Las descripciones de lo que se hizo se escribió entre paréntesis y en cursiva.

Modelo de análisis

El modelo de análisis de las interacciones Profesor-Estudiante-Recurso se organizaron en tres fases: i) se reconocieron episodios de referencia según los objetivos de la planificación, ii) se caracterizaron momentos en los episodios de referencia y iii) se analizaron los invariantes en los momentos que permitieron describir las decisiones de acción de James (Van Zoest et al., 2017).

Fase I.

Se reconocieron tres episodios de referencia tomando como base los objetivos de la planificación de James. El primer episodio correspondió con el objetivo de identificar relaciones entre las características de triángulos rectángulos en un ambiente de geometría dinámica tridimensional. El segundo episodio correspondió con el objetivo de usar argumentos geométricos para comparar las representaciones de la situación problema. Y el tercer episodio correspondió con el objetivo de usar el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos.

Fase II.

Se analizaron las interacciones entre el profesor y los estudiantes que propiciaban discusiones matemáticas mediadas por el recurso tecnológico. En ese sentido, se seleccionó un segmento de transcripción del primer episodio de referencia que ilustra las interacciones de clase tal como se presenta en la tabla 1.

La transcripción que se presenta en la tabla 1 surgió de la interacción entre James y los estudiantes E1, E2, E5 y ENa. James preguntó por las diferencias entre los triángulos rectángulos BLL' y ALL' (ver figura 1) y las respuestas de los estudiantes se basaron en el tamaño de la superficie y lados.

Tabla 1. Reconociendo Triángulos Rectángulos.

No.	Turno	Transcripción
14	James:	[…] El día de hoy lo que vamos a iniciar haciendo es encontrar la distancia de este segmento que tenemos aquí (*se refiere al segmento AL y traza una línea que une los puntos A y L)* que también pude formar un triángulo rectángulo cuando se une con este punto central del suelo *(traza el segmento AL' y se refiere al triángulo ALL'*) ¿Quién me dice cuál es la diferencia entre esos dos triángulos, el que desarrollamos la clase pasada y el que vamos a desarrollar el día de hoy? *(se refiere a los triángulos BLL' y ALL').*
15	ENa:	Que uno es más grande.
16	E5:	(...) (*señala los segmentos BL y AL de los triángulos BLL' y ALL' con sus manos*).
17	James:	este tiene una, que palabra dijiste (*le dirige la palabra a E5*) “superficie recta” y este tiene una “superficie diagonal”.
18	E2:	Es decir, que la distancia de este de acá (*se refiere al segmento BL' del triángulo BLL'*) es más corta (*señala el tablero*)
19	James:	La distancia de este punto hasta acá es más corta (*señala los puntos B y L'*), que la distancia de este punto hasta acá (*señala los puntos A y L'*).
20	E5:	Cambia el ancho.
21	James:	¿Cambia el ancho y cambia...?
22	E2:	El largo (*se refiere a los segmentos AL y BL de los triángulos ALL' y BLL' respectivamente*).
23	E1:	(*señala los segmentos BL y AL de los triángulos BLL' y ALL' con sus manos*).
24	James:	Bueno, básicamente lo que sucede con este ángulo que se está formando aquí *(se refiere al ángulo ALL')* es justamente un tema de perspectiva. Como ustedes pueden ver, la línea que trazamos estaba acorde con la perspectiva de la habitación mientras que está ya toma como un ángulo de inclinación.

Fuente: elaboración propia.

La pregunta de James “¿Quién me dice cuál es la diferencia entre esos dos triángulos?” (línea 14) se interpretó como una ruptura del patrón de interacción (Roth, 2005), debido a que generó una discusión con los estudiantes. En ese caso, se identificó un potencial momento de enseñanza generado por la intervención del profesor. Posterior al reconocimiento de la ruptura del patrón de interacción, se operacionaliza la aproximación teórica seleccionada por medio de preguntas vinculadas a cada una de las características de la estructura analítica.

Para la característica pensamiento matemático del estudiante las preguntas que guiaban los análisis tenían el propósito de reconocer las ideas matemáticas de los estudiantes asociados con una acción, concepción, dificultad o confusión observable.

Por lo tanto, se consideraron las siguientes preguntas: (i) ¿Qué acciones (verbales o gestuales) del estudiante posibilitaron describir rasgos de sus ideas matemáticas? (ii) ¿Qué ideas matemáticas subyacen a las acciones de los estudiantes? (Garzón, 2017; Moreno *et al*., 2023). En la transcripción anterior, las ideas matemáticas de los estudiantes se evidenciaron cuando ENa identificó que el tamaño de la superficie del triángulo rectángulo ALL' "es más grande" (línea 15) que el de BLL', E2 determinó una relación de comparación entre las longitudes de los catetos BL' y AL' cuando afirmó "la distancia de este de acá es más corta" (línea 18) y E5 identificó el cambio de longitud de los catetos BL' y AL' cuando afirmó "cambia el ancho" (línea 20). Las matemáticas que subyacen a las intervenciones de los estudiantes estuvieron relacionadas con la comparación del tamaño de triángulos rectángulos, medir longitudes de los segmentos y reconocer triángulos rectángulos semejantes mediante el cambio de longitud de uno de sus lados.

En relación con la característica lo significativo desde una perspectiva matemática se consideraron las siguientes preguntas: (i) ¿Las acciones del profesor de respuesta a las ideas matemáticas del estudiante se vincularon con los referentes curriculares? (ii) ¿Qué acciones del profesor contribuyeron a que los estudiantes alcanzarán los objetivos propuestos en la planificación? (Garzón, 2017; Moreno *et al*., 2023). En el segmento escogido las acciones de James se pueden evidenciar cuando preguntó (ver línea 14 y 21) y justificó (ver línea 24) con el fin de establecer diferencias entre los triángulos rectángulos.

Estas acciones estuvieron articuladas con los procesos "uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas" y "reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)" (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 86). Además, James al mencionar ideas previas sobre la aplicación del Teorema de Pitágoras, dar indicaciones sobre la tarea, retomar las respuestas de los estudiantes para determinar relaciones y preguntar para que el estudiante determinará una respuesta contribuyó a que los estudiantes identificaran relaciones entre las características de los triángulos rectángulos.

En cuanto característica oportunidad pedagógica se consideraron las siguientes preguntas: (i) ¿Qué tipo de necesidad intelectual se reconoció en las ideas matemáticas del estudiante? (ii) ¿Fue aprovechada la apertura (generada por la necesidad intelectual) en el momento adecuado? (Garzón, 2017; Moreno *et al*., 2017).

En el segmento escogido se reconoce la necesidad de comunicación y de cálculo en las expresiones matemáticas de ENa, E2 y E5. La necesidad de comunicación se manifiesta cuando E5 señala con sus manos los segmentos BL y AL (ver línea 16), debido a que se reconoce el acto de exteriorizar el significado que se pretende dar de la relación entre la longitud de las hipotenusas. La necesidad de cálculo se manifiesta en las intervenciones de ENa y E2, debido a que están relacionadas con el acto de determinar las magnitudes de superficies y longitudes (ver líneas 15 y 18). De igual forma, James aprovechó la necesidad del estudiante en el momento adecuado cuando retomó las respuestas para hacer explícita la relación entre las longitudes de los catetos BL' y AL', reafirma la respuesta de E2 y señala los puntos B, A y L' (ver línea 19). Más aún, James presentó razones apoyadas en el uso del recurso para justificar la diferencia entre la inclinación de los triángulos rectángulos BLL' y ALL' (ver línea 24).

Fase III.

En la fase tres del análisis se estudiaron las tendencias entre las características de los momentos relacionados con el pensamiento matemático del estudiante y el aprovechamiento de la oportunidad pedagógica usando el *software* MaxQDA. Respecto a la codificación abierta se etiquetaron las acciones de cada uno de los participantes.

Para tal fin, se consideraron las oraciones transcritas con sentido completo como unidad de análisis. Los parámetros para construir el código tuvieron en cuenta tres elementos: (i) la etiqueta (o rótulo) que se definió a través de una acción observable y un predicado que acompaña la acción del estudiante o del profesor, (ii) una definición operativa que delimita los alcances o los usos de la etiqueta y (iii) un comentario analítico referente a lo que el investigador interpreto de la acción del estudiante o del profesor. El propósito del comentario analítico fue validar o reformular las etiquetas asignadas mediante discusiones conjuntas entre los investigadores.

Para ilustrar lo anterior, James en la línea 14 tuvo varias acciones que corresponden con códigos diferentes.

En primer lugar, el profesor mencionó "el día de hoy lo que vamos a iniciar haciendo es encontrar la distancia de este segmento que tenemos aquí [...] que también puede formar un triángulo rectángulo cuando se une con este punto central del suelo [...]", acción que se le asignó la etiqueta: *indica los elementos que configuran el desarrollo de la tarea*.

Esta etiqueta se usó cuando el profesor dio indicaciones sobre los elementos o condiciones que delimitan la tarea o el procedimiento a desarrollar y fue asignada dado a que los investigadores interpretaron que el profesor dio indicaciones cuando mencionó que se iba a "encontrar la distancia" del segmento AL perteneciente al triángulo rectángulo ALL'.

Luego, James preguntó "¿Quién me dice cuál es la diferencia entre esos dos triángulos [...]" (línea 14) acción que se asoció con la etiqueta: *pregunta para que el estudiante establezca relaciones geométricas*? Esta etiqueta se usó cuando el profesor preguntó para que el estudiante indagara por relaciones entre la forma, el tamaño, las medidas o las posiciones de los puntos que definen los triángulos rectángulos. En este caso, los investigadores interpretaron que James enfatizó en preguntar por la "diferencia" entre los triángulos rectángulos que se estaban comparando.

Posterior a las acciones de James, el estudiante ENa afirmó "que uno es más grande" (línea 15), acción a la que se le asignó la etiqueta: *compara características entre triángulos rectángulos.* Esta etiqueta se usó cuando el estudiante comparó la forma, el tamaño, las medidas o las posiciones de las figuras en el espacio para determinar relaciones geométricas entre los triángulos rectángulos. En este caso, los investigadores interpretaron que el estudiante determinó que un triángulo es "más grande" que otro mediante el tamaño de la superficie de estos. De manera análoga, se codificaron abiertamente las líneas posteriores y los otros momentos que se reconocieron.

Referente a la codificación axial (o cerrada), los códigos se agruparon en función de las acciones del profesor y las ideas matemáticas de los estudiantes.

El resultado de la agrupación de códigos determinó las categorías emergentes, las cuales se componen de: (i) una etiqueta, (ii) una definición operativa que permite delimitar la relación entre los códigos asociados y (iii) los códigos asociados. Por un lado, una de las categorías que dio cuenta de los rasgos de las ideas matemáticas de los estudiantes fue: *compara las relaciones geométricas entre triángulos rectángulos* y abarcó las ideas matemáticas que expresó el estudiante relacionado con comparar la forma, el tamaño, las longitudes o los puntos de los triángulos rectángulos en el espacio para establecer diferencias o similitudes (ver tabla 4). Los códigos asociados a esta categoría fueron: *(i) compara la forma de los triángulos rectángulos, (ii) compara el tamaño entre los triángulos rectángulos, (iii) compara las longitudes de los segmentos asociadas a los triángulos rectángulos y (iv) compara los puntos que definen el triángulo rectángulo en el espacio.* Esta categoría se puede ilustrar con ideas matemáticas del estudiante tales como: "Que aquí sí se une L [...] y acá no está L, solamente está A y L' [...]" (línea 153, tabla 2).

Por otro lado, una de las categorías que dio cuenta de las decisiones de acción del profesor fue: *gestiona la integración del recurso en el aula* y abarcó la gestión que el profesor le dio a la integración del recurso cuando presentó los elementos que configuraron el desarrollo de la tarea o corrige, confirma y retroalimenta la respuesta del estudiante usando el recurso (ver tabla 4).

Los códigos que definieron esta categoría fueron: *(i) indica los elementos que configuran el desarrollo de la tarea, (ii) corrige la respuesta del estudiante con base al uso del recurso, (iii) confirma la respuesta del estudiante a partir del uso del recurso y (iv) retroalimenta la respuesta del estudiante a partir* *del uso del recurso*. Esta categoría se puede ilustrar cuando el profesor afirma "Muy bien, acá está el espacio tridimensional *(señala la figura en la representación del espacio)* [...]" (línea 157, tabla 2). De manera análoga, se definieron las agrupaciones y las demás categorías que permitieron describir las ideas matemáticas de los estudiantes y las decisiones de acción del futuro profesor.

RESULTADOS

Los análisis realizados permitieron identificar tres momentos que se destacaron por las ideas matemáticas de los estudiantes e intervenciones de James con el uso del recurso. El primer momento, explicitado en la fase II de la metodología, trató sobre el reconocimiento de triángulos rectángulos en el espacio. El segundo momento trató sobre la visualización del modelo bidimensional y tridimensional de la situación problema en el cual las decisiones de James enfatizaron en atender las dificultades de visualización que manifestaban los estudiantes al establecer diferencias entre ambas perspectivas. El tercer momento se destacó por el uso del teorema de Pitágoras por parte de los estudiantes para determinar la distancia entre dos puntos, las decisiones de James enfatizaron en el uso de gráficos y expresiones simbólicas para explicar relaciones algebraicas.

Comparando representaciones en el plano y en el espacio

Este momento inició cuando James preguntó para que los estudiantes compararan las representaciones del triángulo rectángulo que modelaba la situación problema en el plano y en el espacio. Los estudiantes señalaron el punto L en la representación espacial y reconocieron que la altura de la habitación no estaba presente en el plano. James destacó la importancia de una tercera dimensión y justificó cómo la representación espacial que involucra el eje Z proporciona información sobre la altura de la habitación. Conforme a ello, el pensamiento matemático del estudiante se manifestó cuando E2 comparó las representaciones de la situación problema en el plano y en el espacio (línea 151). Posteriormente, E1 se involucra en la discusión con ideas matemáticas complementarias. La tabla 2 presenta el segmento de transcripción que da cuenta de la interacción de clase descrita.

Tabla 2. Comparando representaciones en el Plano y en el Espacio.

No.	Turno	Transcripción
150	James:	¿Qué opinan de estas dos representaciones que hemos construido en este punto?
151	E2:	Que no se parecen
152	James:	¿No se parecen en nada? ¿Qué tiene esta de especial (*señala la figura en la representación del plano)* y que tiene esta especial (*señala la figura en la representación del espacio)*? Por ejemplo ¿Qué tiene esta de especial? (*señala la figura en la representación del espacio*)
153	E1:	Que aquí sí se une L (*se refiere a que el punto L se deja ver en la figura que representa el espacio)* y acá no está L, solamente está A y L' (*señala la figura en la representación del plano*)
154	James:	Acá no está L (*señala la figura en la representación del plano*). Es decir, no está la altura. ¿Por qué aquí no puede estar la altura? (*señala la figura en la representación del plano)* y ¿Por qué aquí sí está la altura? (*señala la figura en la representación del espacio)*
155	ENb:	Tiene otra dimensión
156	ENc:	Porque acá está en tres D
157	James:	Muy bien, acá está el espacio tridimensional (*señala la figura en la representación del espacio*) y aquí está...
158	E2:	En dos D,

159	James:	Muy bien, es así como nosotros al presentarnos desde esta perspectiva (*señala la figura en la representación del plano*), estamos viendo el problema a partir de este plano de acá (*señala el plano XY en la representación bidimensional*) que une el suelo de la habitación. Mientras que, si nosotros extendemos un nuevo eje podemos brindar información de la altura de esta (*señala el eje Z en la figura que se representa el espacio y el segmento LL' del triángulo*).

Fuente: elaboración propia.

Las ideas matemáticas que subyacen a las acciones de los estudiantes E2 y E1 estuvieron relacionadas con comparar representaciones y determinar unidades significantes. Con ese orden de ideas, la acción de E2 estuvo relacionada con la dificultad de establecer un criterio de semejanza, porque afirmó "que no se parecen" (línea 151) al comparar las representaciones en el plano y en el espacio, sin proporcionar detalles o relaciones matemáticas. No obstante, E1 determinó los puntos que tienen en común las dos representaciones al afirmar "acá no está L, solamente está A y L'" (línea 153), ENb identificó que la altura de la habitación no está en la representación del plano cuando afirmó "Tiene otra dimensión" (líneas 155) y ENc identificó que la perspectiva espacial es la que tiene el eje que determina la altura al afirmar "acá está en tres D" (línea 156).

Las acciones de James vinculadas con lo significativo desde la perspectiva matemática para dar respuesta a las ideas matemáticas de los estudiantes fueron: preguntar para que el estudiante determine relaciones (líneas 152 y 154) y justificar relaciones geométricas (línea 159) entre la representación en el plano y en el espacio. Estas acciones estuvieron articuladas con la evidencia de aprendizaje "reconoce regularidades en formas bidimensionales y tridimensionales" (Ministerio de Educación Nacional, 2016, p. 69). A su vez, James propuso el objetivo "Usar argumentos geométricos para comparar las representaciones de la situación problema" (Documento de planificación). En este caso, las acciones de James se centraron en preguntar y retomar ideas de los estudiantes para que se determinarán relaciones entre las representaciones. Por lo tanto, James contribuyó a que los estudiantes dieran razones geométricas y reconocieran cambios entre las representaciones de los triángulos rectángulos en distintas dimensiones.

La oportunidad pedagógica se presentó cuando los estudiantes que intervinieron en la discusión exteriorizaron el significado de la idea que ellos poseían sobre las diferencias entre las representaciones. Es decir, las intervenciones de los estudiantes estuvieron relacionadas con el acto mental de formalización, en particular, con la necesidad intelectual de comunicación (Harel, 2013). Teniendo en cuenta la necesidad de los estudiantes, James aprovechó la intervención para ampliar significados matemáticos mediante las acciones de preguntar para determinar relaciones, preguntar para que el estudiante justifique la respuesta, retomar las respuestas de los estudiantes y justificar relaciones geométricas.

En ese sentido, James propició un espacio de discusión para que los estudiantes determinarán relaciones geométricas y dieran razones para justificar la ausencia de la altura en la representación del plano cuando preguntó "¿Qué tiene esta de especial" (línea 152) y "¿Por qué aquí no puede estar a la altura?" (línea 154). Seguidamente, James retomó la respuesta del estudiante E1 para hacer explícito que el punto L que determina la altura en la vista espacial no está en el plano, cuando afirmó "Acá no está L" (línea 154).

Finalmente, James cerró la discusión cuando justificó que desde la perspectiva en que se está visualizando el plano se tiene el suelo de la habitación, mientras que desde la vista espacial se tiene información adicional de la habitación cuando afirmó que "si nosotros extendemos un nuevo eje podemos brindar información de la altura de esta" (línea, 159).

Usando el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos

Este momento inició cuando el estudiante E7 realizó procedimientos algebraicos en el tablero usando el teorema de Pitágoras para determinar la longitud del segmento AL (ver figura 1). Posteriormente, James intervino en la discusión para mediar en la construcción de los procedimientos asociados al uso del teorema de Pitágoras. Es así como, el pensamiento matemático del estudiante se manifestó cuando E7 escribió los valores numéricos asociados a las longitudes de los segmentos AB y BL, como se presenta en la Figura 3a. Luego, se involucraron en la discusión ENd y algunas respuestas simultáneas que aportaron ideas complementarias sobre el procedimiento que se realizó. La tabla 3 presenta el segmento de transcripción que da cuenta de la interacción de clase descrita.

Tabla 3. Usando el Teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos.

No.	Turno	Transcripción
177	E7:	*(Levanta la mano y se dirige al tablero)* la distancia de A a B es uno punto veinticinco *(escribe el valor en el tablero).* (…) de B a L' es tres puntos cuarenta y tres *(dirige la mirada hacia la imagen proyectada en el tablero)*.
178	James:	no, en la imagen anterior (*se refiere a la Figura 1*) ¿Cuál era la distancia desde B hasta L', es decir, está de aquí? (*señala el segmento BL*').
179	E7:	*(Escribe el valor numérico de dos (2) del segmento BL' en el tablero).* De L a L' hay dos puntos treinta y cinco. Dos coma cinco *(escribe el valor numérico en el tablero)*.
180	James:	Creo que te falta algo en cada uno de esos números…
181	E7:	*(Escribe el cuadrado a cada uno de los términos en la igualdad numérica del tablero)*.
182	James:	Vale, esos son los valores numéricos. Ahora, yo tengo una pregunta ¿Este valor de aquí de dónde salió? *(señala el valor numérico del segmento AB).*
183	ENd:	De la división… la división por cuatro.
184	James:	La división de cinco entre cuatro, (*escribe en el tablero cinco cuartos)*. Porqué razón… por la profundidad ¿Cuánto valía la profundidad?
185	ENd:	Cinco metros.
186	James:	*(Escribe en el tablero cinco cuartos al cuadrado, más dos al cuadrado, más dos punto cinco al cuadrado completando la igualdad).* Ahora, si yo no quiero que la profundidad sea igual a cinco *(escribe en el tablero "p=5")*, sino que, por el contrario, sea un valor variable, un parámetro que pueda valer 5, 6, 7; es decir, que la habitación de Marina se pueda extender todo lo que ella quiera ¿Cómo nos queda esta expresión en términos de una letra p? ¿Cómo nos queda esta distancia de A hasta L en términos de la profundidad, sea cual sea esa profundidad? *(escribe en el tablero "$d(A,L)^2 =$").*
187	E:	*P* -sobre cuatro al cuadrado.
188	James:	"P sobre cuatro al cuadrado" (*escribe la relación pitagórica en términos de p).*

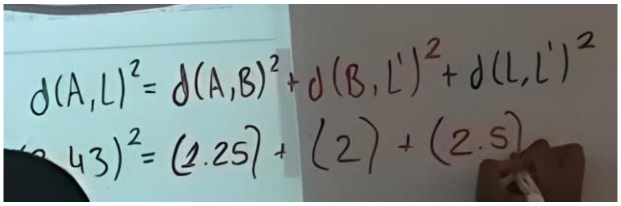
Fuente: elaboración propia.

Las ideas matemáticas que subyacen a las acciones de E7 estuvieron relacionada con reconocer las longitudes cuando afirmó "la distancia de A a B es uno punto veinticinco" (línea 177) y "de B a L' es tres punto cuarenta y tres" (línea 177). Sin embargo, E7 cometió errores al reconocer el valor numérico del segmento BL' y al expresar el exponente de la relación pitagórica en términos de cuadrados.

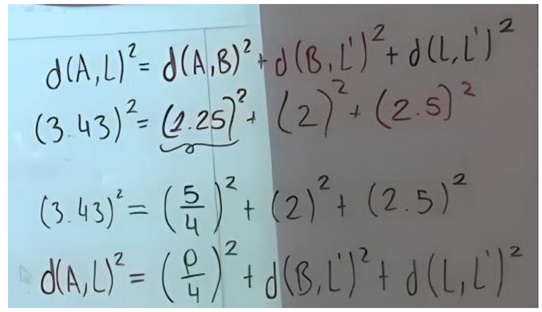
La acción posterior de E7 fue corregir su respuesta dada de la longitud del segmento BL' cuando escribió en el tablero "dos coma cinco" (línea 179). Todos los procedimientos de E7 están condensados en la Figura 3.

Finalmente, la acción de ENd estuvo relacionada con explicitar la operación que determinó la longitud del segmento AB cuando afirmó "de [...] la división por cuatro" (línea 183).

Figura 3. Aplicación del Teorema de Pitágoras a partir del registro simbólico.



3a



3b

Fuente: recuperado de los registros del estudiante E7 y James en el tablero.

Las acciones de James de respuesta a las ideas matemáticas de los estudiantes fueron confirmar, preguntar, indicar, retomar y justificar para direccionar el desarrollo del procedimiento que modelaba simbólicamente la situación problema. Estas acciones estuvieron articuladas con el proceso “identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.87) y con la evidencia de aprendizaje “describe y justifica procesos de medición de longitudes” del derecho básico de aprendizaje “utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes” (Ministerio de Educación Nacional, 2016, p. 68).

Además, James propuso el objetivo de “usar el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos en un ambiente de geometría dinámica que involucra proyecciones ortogonales” (Documento de planificación). En este caso, las acciones se centraron en dar indicaciones al estudiante para alcanzar el objetivo.

Concretamente, James destacó que la organización de las medidas que el estudiante escribió no correspondía con la relación pitagórica, esto se evidencia cuando menciona que “creo que falta algo…” (línea 180) y cuando brindó detalles para que los estudiantes usen una variable que determine la medida de la profundidad de la habitación, esto último se evidencia cuando afirmó “que sea un valor variable” (línea 186).

Otras acciones complementarias de James que permitieron alcanzar el objetivo propuesto fueron confirmar la respuesta del estudiante cuando menciona que “la división de cinco entre cuatro” (línea 184) y retomar la respuesta del estudiante con una acción no verbal, es decir, escribe en el tablero la relación pitagórica usando otra notación numérica (línea 186). En definitiva, las acciones de James contribuyeron a que los estudiantes consideren las longitudes involucradas en los segmentos del triángulo y reconozcan cambios del procedimiento inmerso en la situación problema.

La oportunidad pedagógica se presentó cuando E7 y ENd manifestaron las necesidades intelectuales de certeza y comunicación en sus expresiones matemáticas. Por un lado, la necesidad de certeza se manifestó cuando E7 corrigió sus respuestas, es decir, cuando escribió el valor numérico asociado a la longitud del segmento BL', mencionó “dos coma cinco” (línea 179) en referencia a la longitud del segmento LL' y escribió los exponentes de los términos involucrados en la relación pitagórica. Por otro lado, la necesidad de comunicación se manifestó en las acciones de ENd al formular la expresión que corresponde con la profundidad de la habitación como un parámetro cuando afirmó “p sobre cuatro al cuadrado” (línea 187).

Teniendo en cuenta las necesidades intelectuales de los estudiantes y la manifestación del pensamiento matemático, James aprovechó la intervención de los estudiantes para ampliar significados mediante acciones como preguntar sobre las incongruencias del procedimiento y reformular los planteamientos de los estudiantes.

James se percató del error de E7 al determinar la medida del segmento BL' y se apoyó en el uso del recurso para hacer mención al segmento cuando preguntó "¿Cuál es la distancia de B hasta L', es decir, esta de aquí?" (línea 178). También preguntó para que el estudiante justificará la respuesta cuando dijo "¿Este valor de aquí de dónde salió?" (línea 182).

Por último, James preguntó para que el estudiante reformulara la respuesta en términos de un parámetro, cuando preguntó "¿Cómo nos queda esta expresión en términos de una letra p?" (línea 186) y cuando reformula la pregunta involucrando la distancia de A hasta L para que el estudiante propusiera la respuesta en términos de un parámetro.

Decisiones de acción del futuro profesor que aprovechan las ideas matemáticas de los estudiantes

Frente a la codificación axial los momentos fueron etiquetados de tal manera que permitieron destacar los patrones invariantes en las acciones de los estudiantes asociados a sus ideas matemáticas y en las decisiones de acción del futuro profesor en respuesta a las ideas matemáticas del estudiante.

El propósito fue detectar las acciones que dieran cuenta del aprovechamiento que el profesor hace de las ideas matemáticas del estudiante en interacción con el del recurso tecnológico. A continuación, se caracterizan las ideas matemáticas del estudiante y las decisiones de acción del profesor a través de categorías emergentes.

Ideas matemáticas del estudiante durante las interacciones de clase

La tabla 4 condensa cuatro categorías emergentes con su respectiva definición operativa y los códigos asociados. Estas categorías emergentes se destacan por las formas en las que se manifestó el pensamiento matemático del estudiante durante la interacción con el profesor y el recurso tecnológico para la enseñanza del teorema de Pitágoras. Además, se destacaron por su vínculo con la necesidad intelectual y las confusiones que manifestó el estudiante a la hora de expresar sus matemáticas.

Tabla 4. Categorías emergentes de las ideas matemáticas del estudiante.

Categoría	Código descriptor
Compara relaciones geométricas entre triángulos rectángulos (C1). Abarca las ideas matemáticas que expresa el estudiante relacionado con comparar la forma, el tamaño, las longitudes o los puntos en el espacio para establecer diferencias o similitudes entre los triángulos rectángulos.	1. Compara la forma de los triángulos, rectángulos. 2. Compara el tamaño entre los triángulos rectángulos. 3. Compara las longitudes de los segmentos asociadas a los triángulos rectángulos. 4. Compara los puntos que definen el triángulo rectángulo en el espacio.
Determina la respuesta a partir del uso del teorema de Pitágoras (C2). Abarca el uso del teorema de Pitágoras por parte del estudiante para determinar una longitud o una expresión algebraica que relaciona la variación de la distancia entre dos puntos en el espacio.	5. Usa el teorema de Pitágoras para determinar la distancia entre dos puntos. 6. Usa el teorema de Pitágoras para establecer una expresión algebraica.
Corrige el procedimiento que determina su respuesta a partir del uso del recurso (C3). Abarca las estrategias que el estudiante usa para corregir su respuesta a partir de la manipulación del recurso tecnológico, la visualización de las características de los triángulos rectángulos y/o el tratamiento de las expresiones simbólicas.	7. Manipula el recurso tecnológico para establecer relaciones geométricas que determinan la respuesta. 8. Visualiza la situación problema en la representación geométrica para corregir su respuesta. 9. Corrige el tratamiento simbólico a partir de la visualización de las características de los triángulos rectángulos.
Errores y dificultades en el uso del teorema de Pitágoras en un ambiente de geometría dinámica espacial (C4). Abarca errores y dificultades manifestados(as) por el estudiante al reconocer	10. Dificultad al reconocer la posición espacial de los triángulos rectángulos a partir de un sistema de coordenadas.

Praxis

la posición espacial de los triángulos rectángulos usando un sistema de coordenadas, relacionar las representaciones en el plano y en el espacio de los triángulos rectángulos y al expresar la relación pitagórica en términos de un parámetro. Además, los estudiantes manifestaron confusión en formular la ecuación numérica que vincula el uso del teorema de Pitágoras con los elementos de la situación problema.	11. Dificultad para relacionar la representación plana y espacial de un triángulo rectángulos. 12. Errores al formular la ecuación que vincula el uso del teorema de Pitágoras con los elementos de la situación problema. 13. Dificultad para expresar la relación pitagórica en término de una variable.

Fuente: elaboración propia.

En relación con la categoría C1 se pudieron reconocer aspectos asociados a la caracterización de objetos geométricos en clase, lo que hace explícita la relación con la necesidad intelectual de comunicación. Concretamente, el proceso de comparar implica —además de identificar características y diferencias entre objetos matemáticos— la construcción de argumentos en clase que explicitan la naturaleza o los atributos de los objetos matemáticos. En cuanto a las categorías C2 y C3 se pudieron establecer relaciones con la necesidad de cálculo del estudiante, debido a que las categorías sugieren el uso de procedimientos de rutina para que el estudiante aporte respuestas concretas. La categoría C4 permitió identificar y reportar elementos de orden didáctico relacionados con el aprendizaje del teorema de Pitágoras usando geometría dinámica. Estos elementos permitieron dar cuenta de las ideas matemáticas de los estudiantes en base a errores y confusiones.

Decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas

En relación con las acciones del profesor la Tabla 5 explicita cuatro categorías que caracterizan las decisiones de acción del profesor al prestar atención y aprovechar las ideas matemáticas de los estudiantes. A continuación, se presentan dichas categorías y los códigos asociados.

Tabla 5. Categorías asociadas a las decisiones acciones del futuro profesor.

Categoría	Código descriptor
Pregunta para determinar relaciones matemáticas (C5). Abarca las preguntas que el profesor realiza para que el estudiante determine y/o justifique una respuesta numérica y para que el estudiante establezca relaciones geométricas y algebraicas entre los elementos (forma, tamaño, longitud de segmentos y posición de puntos) que caracterizan los triángulos rectángulos.	14. Pregunta para que el estudiante determine una respuesta numérica. 15. Pregunta para que el estudiante justifique una respuesta numérica. 16. Pregunta para que el estudiante establezca relaciones geométricas entre triángulos rectángulos. 17. Pregunta para que el estudiante establezca relaciones algebraicas entre los puntos que definen los triángulos rectángulos.
Usa las ideas matemáticas del estudiante para ampliar significados matemáticos (C6). Abarca el uso que el profesor le da a la respuesta del estudiante cuando retoma ideas previas sobre la aplicación del teorema de Pitágoras para establecer relaciones geométricas entre triángulos rectángulos y establecer relaciones algebraicas entre los puntos que definen los triángulos rectángulos.	18. Retoma ideas previas de los estudiantes sobre la aplicación del teorema de Pitágoras. 19. Usa la respuesta del estudiante para que se establezcan relaciones geométricas entre triángulos rectángulos. 20. Usa la respuesta del estudiante para que se establezcan relaciones algebraicas entre los puntos que definen los triángulos rectángulos.
Gestión de la integración del recurso en el aula (C7). Abarca la gestión que el profesor le da a la integración del recurso cuando presenta las indicaciones que configuran el desarrollo	21. Indica los elementos que configuran el desarrollo de la tarea. 22. Corrige la respuesta del estudiante con base al uso del recurso. 23. Confirma la respuesta del estudiante a partir del uso del recurso.

de la tarea o corrige, confirma y retroalimenta la respuesta del estudiante a partir del uso del recurso tecnológico.	24. Retroalimenta la respuesta del estudiante a partir del uso del recurso.
Justifica relaciones geométricas entre triángulos rectángulos (C8). Abarca las justificaciones que el profesor hace sobre las relaciones geométricas entre triángulos rectángulos y los procedimientos asociados al uso del teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos.	25. Justifica relaciones geométricas entre triángulos rectángulos. 26. Justifica un procedimiento (numérico o algebraico) para que el estudiante determine relaciones geométricas.

Fuente: elaboración propia.

La acción de preguntar cómo se definió en la categoría C5 es un elemento para destacar por parte del profesor. En otras palabras, las preguntas permitieron dar cuenta de las acciones propositivas del profesor para la generación de interacciones de clase. Este elemento fue pertinente para la construcción de momentos con oportunidades pedagógicas, particularmente, en relación con la búsqueda de discusiones matemáticas entre el profesor y los estudiantes.
La gestión de la integración del recurso tecnológico en el aula de matemáticas definida en la categoría C7 se vinculó intrínsecamente con aspectos de lo significativo desde la perspectiva matemática, puesto que esta decisión de acción contribuyó a alcanzar los objetivos propuestos en la planificación en dos sentidos: (i) a través del uso que el estudiante hace del recurso para aplicar el teorema de Pitágoras y (ii) la gestión que el profesor hace del recurso tecnológico como elemento que le permitió retroalimentar las ideas matemáticas del estudiante.

Las categorías de C6 y C8 están vinculadas directamente con el aprovechamiento que hace el profesor de las ideas matemáticas de los estudiantes. En particular, el profesor utiliza las ideas matemáticas de los estudiantes para generar otras discusiones —aprovechando la apertura de la necesidad intelectual o las confusiones— o para profundizar en aspectos importantes que permitieron ampliar significados matemáticos.

DISCUSIÓN

En la implementación de James algunos estudiantes manifestaron dificultades asociadas con el proceso de visualización de figuras desde diferentes perspectivas. Estas complejidades se vieron reflejadas en las tareas que involucran la relación entre figuras bidimensionales y tridimensionales (ver código 11, tabla 4).
Respecto a lo anterior, Rojas *et al*. (2021) señalan que el estudiante enfrenta desafíos al percibir la tridimensionalidad de un objeto representado en un sistema de dos dimensiones, así como la dificultad de comprender la estructura de una figura en el espacio representado en el plano.

En otras palabras, establecer relaciones entre el espacio tridimensional y bidimensional es problemático para el estudiante, debido a que se reconocen deficiencias en el pensamiento espacial para comprender cómo se deconstruyen dimensionalmente las figuras en el espacio a través de las vistas isométricas en el plano (Sánchez-Barrera y Peña-Garzón, 2023).

Otra dificultad que reportan Rojas *et al*. (2021) está vinculada con la construcción de representaciones de una figura al considerar sus características descriptivas, la cual puede presentar un desafío procedimental cuando los estudiantes deben considerar detalles y proporciones específicas al representar la figura —esta dificultad también puede explicitarse en términos del reconocimiento de unidades significantes que propone Duval (2017)—. Esta dificultad y sus errores asociados evidencian la necesidad de trabajar en el desarrollo de habilidades de visualización espacial y comprensión de diferentes representaciones.

Cáceres *et al*. (2016) reportan la “dificultad en la traducción y transformación de sistemas de representación para el cálculo de la distancia entre dos puntos” (pp. 69-71), la cual se refleja en errores como asumir que todas las trayectorias en el plano son horizontales o verticales, ubicar incorrectamente parejas ordenadas en el plano cartesiano y traducir incorrectamente el paso del sistema de representación geométrico al simbólico utilizando el teorema de Pitágoras. Torres (2017) reporta que los estudiantes presentan múltiples dificultades cuando se usa el teorema de Pitágoras.

En ese sentido, a lo largo de interacción de James con los estudiantes se evidenciaron dificultades como reconocer las unidades que definen un triángulo rectángulo cuando la orientación es diferente de la estándar, en la notación o mediación de la situación problema y, en especial, dificultad para reconocer el concepto de semejanza cuando se comparan triángulos rectángulos en el espacio (Torres, 2017).

En relación con las decisiones de acción del profesor estas se caracterizan por el uso situado del conocimiento profesional, en particular, cuando se aprovecha el pensamiento matemático del estudiante y se integra tecnología. Respecto al uso del conocimiento profesional estudios como los de Jacobs *et al*. (2016) destacan la importancia de la respuesta que los profesores dan al pensamiento matemático del estudiante en el aula de clase, y amplía el sentido de las habilidades de identificar, interpretar y decidir desde una perspectiva situada. En el caso de James, las acciones de preguntar y justificar se relacionan con los patrones de respuesta al pensamiento del estudiante durante las discusiones de clase.

Igualmente, estudios como el de Moreno *et al*. (2023) destacan el papel de los recursos tecnológicos y las representaciones semióticas en los momentos de enseñanza significativas que aprovechan el pensamiento matemático del estudiante, lo cual guarda una estricta relación con la integración del recurso que James realizó en su gestión de aula.

De igual forma, Stokero *et al*. (2016) destacan la relevancia del uso del pensamiento matemático del estudiante como un recurso que posibilita ampliar significados matemáticos y enriquecer las oportunidades pedagógicas de respuesta. En el caso de James, estos planteamientos se vinculan con el uso de las ideas matemáticas de los estudiantes que él realizó durante la implementación.

Con ese orden de ideas, las decisiones de acción configuran un elemento que es intrínseco al aprovechamiento que el profesor hace del pensamiento matemático del estudiante, las necesidades intelectuales y las dificultades. Pero, a su vez, las decisiones de acción se vinculan con la gestión de la integración del recurso tecnológico y la conexión entre los objetivos propuestos para la clase.

CONCLUSIÓN

A lo largo de este estudio se cualificaron las decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas durante el aprovechamiento de oportunidades pedagógicas, lo cual muestra acciones a considerar para generar situaciones de enseñanza significativas en las que el estudiante y el profesor se consideran sujetos activos de las discusiones matemáticas. Fundamentalmente, por parte de los estudiantes se reflejaron sus necesidades intelectuales por medio de acciones centradas en las características de los triángulos rectángulos y la relación pitagórica para determinar la distancia entre dos puntos. También, se evidencia el uso procedimental que los estudiantes desarrollaron en sus actividades, que permitió destacar los errores y dificultades al reconocer representaciones en 2D de objetos que tienen naturaleza 3D.

Por parte del profesor, se reconocieron las acciones que posibilitaron aprovechar las discusiones matemáticas, como preguntar, justificar, retomar las ideas matemáticas del estudiante y usar recursos tecnológicos para ampliar significados matemáticos. Estas acciones también permitieron atender los errores y dificultades asociados al aprendizaje del teorema de Pitágoras, considerando el uso de diversas representaciones para reconocer características específicas de los triángulos rectángulos.

En este sentido, determinar los momentos con oportunidades pedagógicas y las decisiones de acción del profesor permitió describir su práctica profesional durante la implementación de una clase centrada en la enseñanza del teorema de Pitágoras.

Por lo tanto, este estudio destaca la importancia de estudiar las prácticas del futuro profesor para establecer lineamientos que configuran su desarrollo profesional a través del uso de recursos innovadores y la toma de decisiones en respuesta al pensamiento matemático del estudiante. Lo cual explicita las exigencias de la integración de tecnologías en la práctica del profesor al dar cuenta de los usos de sus conocimientos pedagógicos y disciplinares (Peña-Coronado y Cano-Velásquez, 2023).

De cara a futuros trabajos, queda abierta la posibilidad de explorar los usos del conocimiento profesional del profesor en términos de la reflexión retrospectiva de la práctica. Dando relevancia a la mirada profesional del profesor en la planificación y la reflexión de sus clases como elemento central del desarrollo profesional (Cumbal *et al*., 2023; Medina-Cobo, 2023).

De igual manera, queda abierta la posibilidad de explorar la integración que el profesor hace de los recursos digitales y cómo esos modos de integrar los recursos transforman la práctica profesional en la enseñanza de las matemáticas.

DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES

Como autores manifestamos que durante la elaboración del artículo no se ha incidido en intereses personales o ajenos a nuestra voluntad, incluyendo malas conductas y valores distintos a los que usual y éticamente tiene la investigación. Por lo tanto, declaramos que no existe conflicto de intereses personales.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación quien financió el programa de investigación *Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro* (código 1115-852-70767) a través de la convocatoria 891- 2020, contrato 133 – 2021, del Patrimonio Autónomo Fondo Nacional de Financiamiento para la Ciencia, la Tecnología y la Innovación Francisco José de Caldas, y al proyecto de investigación código 71327 de la misma convocatoria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cáceres, M., Moreno, Y., Tello J., y Vargas, I. (2016). Cálculo de la distancia entre dos puntos [Trabajo Fin de Maestría]. Universidad de los Andes. http://hdl.handle.net/1992/13726

Carcamo, A., & Fuentealba, C. (2023). Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares. Bolema Boletim de Educação Matemática, 37(76), 577-601. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

Cumbal, L., Belalcázar, N., Pechené, V., y Garzón, D. (2023). Análisis del estado de la competencia “mirar profesionalmente” de profesores en formación en la planificación de una lección. Cuadernos Pedagógicos, 25(36), 1–19. https://revistas.udea.edu.co/index.php/cp/article/view/354324/20813303

Duval, R. (2017). Figuras Geométricas y Discurso Matemático. En M. Vega, (Trans.), Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Programa Editorial Universidad del Valle.

Esquea-Gamero, O. (2017). Sentidos de la práctica pedagógica en la formación docente. Caso Facultad de Educación - Universidad del Atlántico. Praxis, 13(2), 171–180. https://doi.org/10.21676/23897856.2359

Fernández, C., González-Forte, J., y Ivars, P. (2022). La competencia mirar profesionalmente de futuros profesores de matemáticas: uso de representaciones de la práctica. Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2(3). https://doi.org/10.54541/reviem.v2i3.56

Garzón, D. (2017). Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula. Educación Matemática, 29(3), 131–160. https://doi.org/10.24844/em2903.05

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 1(2), 155-177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Harel, G. (2013). Intellectual Need. En K, Leatham. (Ed.), Vital Directions for Mathematics Education Research (pp. 119-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_6

Jacobs, V., & Empson, S. (2016). Responding to Children's Mathematical Thinking in the Moment: An Emerging Framework of Teaching Moves. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48(1), 185–197. https://eric.ed.gov/?id=EJ1096682

Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 41(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jacobs, V., Empson, S., Jessup, N., Dunning, A., Pynes, D., Krause, G., & Franke, T. M. (2022). Profiles of teachers' expertise in professional noticing of children's mathematical thinking. Journal of Mathematics Teacher Education, 27, 295-324. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09558-z

Leatham, K., Peterson, B., Stockero, S., & Van Zoest, L. (2015). Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 46(1), 88-124. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0088

Llinares, S. (2023, del 30 de Julio al 4 agosto). Formación de profesores de Matemáticas "basada" en la práctica. El aprendizaje de prácticas profesionales específicas [conferencia]. Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM), Lima, Perú. https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen1-Invitados.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias: en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). (2016). Derechos básicos de aprendizaje (DBA) Matemáticas V2. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Ministerio de Educación Nacional.

Medina-Cobo, O. (2023). Campo educativo, práctica docente y políticas educativas en Colombia. Praxis, 19(2), 274–286. https://doi.org/10.21676/23897856.4470

Moreno, M., Morales, M., y Garzón, D. (2023). Movimientos en el aula. Estudio sobre la práctica pedagógica a partir de momentos significativos. Cuadernos Pedagógicos, 25(36), 1–22. https://revistas.udea.edu.co/index.php/cp/article/view/352157/20813304Brill

Oonk, W., Verloop, N., & Gravemeijer, K. P. E. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student Teachers' Competence in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. National Council of Teachers of Mathematics, 46(5), 559–598. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0559

Peña-Coronado, G. A., y Cano-Velásquez, T. E. (2023). TPACK para la implementación de recursos educativos digitales: una revisión sistemática. Praxis, 19(2), 238–255. https://doi.org/10.21676/23897856.5073

Rojas, N, Santana, O y Pérez, M. (2021). Perspectiva isométrica [Trabajo Fin de Maestría]. Universidad de los Andes. http://hdl.handle.net/1992/55804

Roth, W. (2005). Seeking and Finding Patterns. In Doing Qualitative Research (pp. 195-211).

Sánchez-Barrera, Y., y Peña-Garzón, L. (2023). Tipos de actividad cognitiva y grado de pensamiento espacial en estudiantes de grado noveno al representar poliedros. Praxis, 19(1), 69–86. https://doi.org/10.21676/23897856.3868

Schoenfeld, A. H. (2008). On Modeling Teachers' in-the-moment Decision Making. In A. H. Schoenfeld. (Ed.), A Study of Teaching: Multiple Lenses, Multiple Views (JRME monograph), (pp. 45-96). National Council of Teachers of Mathematics.

Sherin, M., & van Es, E. (2008). Effects of Video Club Participation on Teachers' Professional Vision.

Journal of Teacher Education, 60(1), 20-37. https://doi.org/10.1177/0022487108328155

Stockero, S., Leatham, K., Ochieng, M., Van Zoest, L., & Peterson, B. (2019). Teachers' orientations toward using student mathematical thinking as a resource during whole-class discussion. Journal of Mathematics Teacher Education, 23, 237-267. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09421-0

Teppo, A. R. (2015). Grounded Theory Methods. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & amp; N. Presmeg (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education (pp. 3–21). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Torres, M. (2017). El Teorema de Pitágoras en la formación inicial del profesor de Educación Secundaria [Trabajo Fin de Máster]. Universidad de Granada. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_MariloliTorresgonzalez.pdf

Van Zoest, L., Stockero, S., Leatham, K., Peterson, B., Atanga, N., & Ochieng, M. (2017). Attributes of Instances of Student Mathematical Thinking that Are Worth Building on in WholeClass Discussion. Mathematical Thinking and Learning, 19(1), 33–54. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1259786

Venturini, M., & Sinclair, N. (2017). Designing Assessment Tasks in a Dynamic Geometry Environment. Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks, 77-98. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_5

Wallin, A., & Amador, J. (2018). Supporting secondary rural teachers' development of noticing and pedagogical design capacity through video clubs. Journal of Mathematics Teacher Education, 22(5), 515–540. doi.org/10.1007/s10857-018-9397-3

Yin, R. (2009). Case study research: Design and methods V5. Sage.