

Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria

Mistakes in solving problems with first grade equations in students of high school

Sofía Tettay-Mejía¹ , Mellissa Pulgar-García² , Yesika Rojas-Sandoval³ 

1. Lic. Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: stettay@est.uniatlantico.edu.co
2. Lic. Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: mpulgar@est.uniatlantico.edu.co
3. M.Sc. Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: yesikarojas@mail.uniatlantico.edu.co

Recibido en octubre 1 de 2019

Aceptado en noviembre 24 de 2019

Publicado en línea en diciembre 2 de 2019

Resumen

En la resolución de ecuaciones de primer grado se han presentado distintos errores cometidos por los estudiantes causados por déficits en los procesos de aprendizaje del álgebra. Por esta razón, se propuso analizar los errores que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en noveno grado. El diseño y metodología de investigación empleado es un estudio de caso, basado en un enfoque cualitativo, el cual se realizó con una muestra de tres estudiantes. Para la recolección y análisis de la información se implementaron técnicas e instrumentos dentro de los cuales se encuentran la observación, prueba diagnóstica, diario de campo, una matriz de clasificación de la información y un análisis de contenido. Luego de analizar la información obtenida se identificaron distintos errores que fueron clasificados y sistematizados según el origen que estos presentaban, llegando a la conclusión de que los estudiantes presentan con mayor frecuencia errores que tienen su origen en ausencia de sentido.

Palabras clave: lenguaje algebraico; clasificación de errores; resolución de problemas; ecuaciones de primer grado.

Abstract

In the resolution of equations of the first degree have been different mistakes made by students and caused by deficits in the learning processes of algebra learning. For this reason, it was proposed to analyze the errors that students present in solving problems with equations of first grade in ninth grade of schooling. The research design and methodology used here is a case study, based on a qualitative approach, which was carried out with a sample of three students. For the collection and analysis of the information, techniques and instruments were implemented within which are the observation, diagnostic test, field diary, an information classification matrix and a content analysis. After analyzing the information obtained, different errors were identified, classified and systematized according to the origin they presented, reaching the conclusion that students frequently present errors that have their origin in the absence of meaning.

Keywords: Analysis; mistakes; problem resolution; first degree equations.

Introducción

Los errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y especialmente en el álgebra es un tema que genera interés y preocupación en la comunidad docente e investigadores en educación matemática. Estos errores se presentan de manera repetitiva en la construcción de los conocimientos, por lo cual se hace necesario tener en cuenta procesos que permitan analizarlos detalladamente para conocer cómo se originan y de esta manera los docentes puedan trabajar en acciones de superación y corrección.

Analizar los errores que cometen los estudiantes le permitirá al docente tener una mirada amplia del problema en cuestión, por lo que podrá identificar cómo los estudiantes interpretan las tareas algebraicas y, lo más importante, podrá conocer el origen de los errores y su tipología. Socas, Ruano y Palarea (2008) afirman que “es importante conocer los errores básicos cometidos por los alumnos puesto que le provee de información sobre la forma en que estos interpretan los problemas y sobre cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos” (p. 61), por lo que posterior al análisis el docente tendrá una ayuda para organizar estrategias que mejoren el aprendizaje de los estudiantes haciendo hincapié en los aspectos que generan más dificultades. De esta manera podrá contribuir para una mejor preparación de instancias de corrección (García Suárez, Segovia y Lupiáñez, 2011).

Diversos investigadores han centrado sus estudios en el análisis de los errores en el álgebra, dando lugar a diversas teorías acerca de la clasificación de los errores, sus posibles causas y orígenes. Socas *et al.* (2008) clasifican los errores de acuerdo a su origen. Entre ellos están los “errores que tienen su origen en un obstáculo y los errores que tienen su origen en ausencia del sentido” (p. 81). Con respecto a los errores que tienen su origen en un obstáculo está la idea de que los estudiantes que inician a estudiar álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que pueden estar incompletos algunas veces (Socas, Camacho y Hernández, 1998).

En este mismo orden, los errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento tienen relación con los que tienen origen en un obstáculo (Franchi y Hernández, 2004). Según Radatz (1979), estos errores surgen ante la flexibilidad inadecuada para codificar y decodificar la nueva información. Esto por lo general significa que los estudiantes al enfrentarse a informaciones similares son conducidos a la rigidez habitual de pensamiento. En estos casos, los

estudiantes crean o desarrollan operaciones cognitivas que generalizan aplicándolas en tareas matemáticas que han cambiado sus condiciones fundamentales. Es decir, alguna parte o algún aspecto de la información persisten en la mente del estudiante, evitando así el procesamiento de la nueva información.

Por otro lado, los errores que tienen su origen en ausencia del sentido según Socas *et al.* (1998), se pueden diferenciar en tres distintas etapas. En primer lugar, los errores que tienen su origen en la aritmética en los cuales los estudiantes no solo cometen errores netamente de álgebra sino también errores en aritmética que no fueron corregidos previamente. Estos están relacionados con los errores debido al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos de requisitos previos que expone Radatz (1979), los cuales incluyen todos los déficits en el conocimiento de contenidos previos que necesita el estudiante para el desarrollo de una tarea matemática. Tales déficits admiten la ignorancia de algoritmos, procedimientos incorrectos, conocimiento no suficiente de conceptos, entre otras cosas.

En segundo lugar, se encuentran los errores de procedimiento que se dan por el uso inadecuado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”, donde la mayoría de las veces los estudiantes crean falsas generalizaciones de las operaciones; de estos se derivan los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al mal uso de recíproco y errores de cancelación. Así mismo, con relación a estos tipos de errores se puede considerar los errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes que categoriza Radatz (1979), en los cuales se da el uso de reglas irrelevantes, desarrollo de algoritmos incorrectos y estrategias inadecuadas para la solución de problemas matemáticos; estos generalmente se originan por experiencias en la aplicación exitosa de reglas en tareas matemáticas similares.

Por último, están los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico, los cuales son estrictamente algebraicos. Estos surgen debido a las transformaciones algebraicas que representan un instrumento de cálculo algebraico que queda a medio camino entre lo formal y el conocimiento explícito de su significado. Estos errores tienen relación con los errores debidos a dificultades de lenguaje que expone Radatz (1979), los cuales se dan por “una mala interpretación de la semántica de un texto matemático de tal manera que los estudiantes al enfrentarse a conceptos matemáticos,

símbolos y vocabulario conciben un problema de lengua extranjera” (p.165).

Tipos de errores asociados en la resolución de problemas de ecuaciones de primer grado

Los errores cometidos por los estudiantes al momento de resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado son comunes y se pueden evidenciar en todos los procesos de aprendizaje. De Moreno y De Castellanos (1997) clasifican algunos de los errores que cometen los estudiantes al momento de resolver problemas. Dentro de estos errores se encuentran la dificultad que presentan los estudiantes al no diferenciar el inverso multiplicativo del inverso aditivo, lo cual genera fallas en el proceso de resolución de la ecuación presentada. Un ejemplo de esto es la ecuación “ $3x + 1 = 0$ ”, la cual el estudiante resuelve como “ $x = -1 - 3$ ” y esta falla a su vez genera que el estudiante dé una respuesta equivocada.

De igual forma, De Moreno y De Castellanos (1997) también mencionan otro error muy frecuente, el cual trata del poco manejo de las operaciones con los números naturales, donde los estudiantes tienen problemas al momento de manejar los signos en la transposición de términos en una ecuación. Este error radica desde la aritmética, afectando los nuevos procesos que están manejando los estudiantes dado que estos los llevan hasta el campo del álgebra, en particular en la resolución de ecuaciones de primer grado. Además, al momento de realizar la transposición de términos se presenta que los estudiantes lo hacen sin respetar un orden, pensando que esto no altera el resultado que deben obtener. Sumados a estos errores se encuentran que los estudiantes en la mayoría de los casos cuando suman un término a un lado de la ecuación se les olvida que deben hacerlo de igual forma al otro lado de la igualdad (De Moreno y De Castellanos, 1997). Estos y los errores mencionados anteriormente corresponden a lo que Socas *et al.* (2008) denominaron errores de procedimiento.

Por otra parte, el manejo del lenguaje algebraico juega un papel primordial en los procesos de resolución de problemas con ecuaciones, por lo cual, si los estudiantes no entienden o tienen poco manejo de este lenguaje será una puerta abierta para cometer errores. Barría y Chavarría (2010) realizaron un estudio acerca de las dificultades que presentan los estudiantes al momento de resolver problemas con ecuaciones, donde pudieron identificar algunos de los errores que cometen los estudiantes al momento de hacer uso del lenguaje algebraico para construir y resolver ecuaciones de primer grado.

Dentro del análisis de Barría y Chavarría (2010) llegaron a la conclusión de que “los estudiantes no saben expresar la relación que hay entre las variables al momento de presentarles alguna situación problema en el que se requiere que el estudiante tenga un uso y manejo apropiado del lenguaje algebraico” (p. 37). También se muestra el caso en el que el estudiante da una solución correcta a los ejercicios, pero no necesariamente están utilizando un proceso adecuado para resolverlas. Mencionan que una de las causas es que el estudiante interpreta el ejercicio de forma literal, y de nuevo se debe a que no expresa de manera correcta la relación existente con una variable.

De igual forma, en el análisis de Barría y Chavarría (2010) hallaron que los estudiantes en muchos casos no saben plantear una ecuación, por lo que prefieren utilizar el método del tanteo para dar respuesta al problema; bien se sabe que esta forma de solución es válida, pero en muchos casos supone un trabajo laborioso sobre todo cuando se trata de una ecuación donde están involucradas cantidades grandes. Pero los errores hallados no solamente son al momento de plantear una ecuación. También está el caso en el que los estudiantes plantean bien la ecuación, pero al momento de resolverla presentan errores. Se encontró que los mismos no presentan competencias en algoritmos propios de la enseñanza media, pues al presentarse nuevos contenidos estos no los relacionan, creando problemas para resolver las ecuaciones.

En síntesis, de lo expuesto anteriormente se puede evidenciar que la mayor cantidad de errores en la resolución de problemas radica en la falta del uso y manejo del lenguaje algebraico, pero además las reglas de procedimiento son un factor importante en este, ya que los estudiantes confunden propiedades o no saben operar ecuaciones. Muchos de estos errores tienen origen en las bases aritméticas que manejan, donde se ve que si un problema no es solucionado de manera oportuna, este en un futuro afectará las temáticas posteriores.

Planteamiento del problema

A los estudiantes de noveno grado se les ha venido formando en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado. Sin embargo, han presentado errores en la resolución de problemas que se les plantean, lo que se debe a que los estudiantes con frecuencia mecanizan y generalizan reglas y operaciones dando mal uso a fórmulas o reglas de procedimiento. Como se menciona en la compilación *Las matemáticas su enseñanza y aprendizaje*:

El uso inapropiado de “formulas” y “reglas de procedimientos” también da lugar a errores de este tipo (errores de procedimiento). Se debe a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto, la usan tal cual la conocen o la adaptan a una situación nueva (...) La mayoría de estos errores se origina como falsa generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente, falta de linealidad en estos operadores (Rico, 1997).

En este orden de ideas, se han observado de forma particular errores relacionados con el mal uso de ciertas propiedades al momento de resolver ecuaciones de primer grado: los estudiantes no tienen una noción clara de los pasos a seguir o realizan generalizaciones de reglas que solo se aplican en campos determinados. Un ejemplo de esto es el mal uso de las propiedades como lo es la propiedad distributiva, es decir, a los estudiantes se les plantea la ecuación $5(3x - 2) = 20$ y lo resuelven de la siguiente manera $3x - 10 = 20$. Este tipo de errores es muy frecuente en los estudiantes y corresponde a errores de procedimiento, según la clasificación de *Socas et al.* (1998), donde “los errores de procedimiento son consecuencia del mal uso de ‘fórmulas’ o ‘reglas de procedimiento’”. Estos errores se pueden agrupar en errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al uso del recíproco, errores de cancelación” (p. 83).

De igual forma, es frecuente encontrar errores presentados por los estudiantes en el álgebra que están relacionados con fallas desde la aritmética, al realizar sumas, multiplicaciones o divisiones en los procesos de resolución de la ecuación. También, los relacionados con el uso del lenguaje algebraico, ven las variables como algo complejo y difícil de entender, operan como si estuvieran aún en campos aritméticos simples y al momento de presentarles un problema donde es necesario que planteen expresiones algebraicas no logran hacer la estructura correcta de esta.

Luego, observando el problema en cuestión, surgió el interés por parte de las investigadoras en conocer los orígenes y posibles causas de los errores que cometen los estudiantes, por lo que se estableció como objetivo general analizar los errores que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en noveno grado. Para cumplir este objetivo se establecieron como objetivos específicos identificar los tipos de errores que cometen los estudiantes al solucionar problemas que involucren ecuaciones de primer grado en noveno grado, clasificar los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de

problemas de ecuaciones de primer grado en noveno grado y sistematizar las características de los principales errores que cometen los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado en noveno grado.

Metodología

Tipo de investigación

El desarrollo de esta investigación corresponde a un enfoque cualitativo. El enfoque cualitativo según Castaño y Quecedo (2003) está definido como “aquella que produce datos descriptivos: las propias palabras de personas y la conducta observable” (p. 7). De igual manera, Hernández Sampieri (2014) hace referencia al planteamiento de un problema que es observado para desarrollar un proceso que permita descripciones, estudios e interpretaciones que generen teorías. En este sentido, esta investigación busca clasificar, a través del análisis, los errores que cometen los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado y las causas de estos.

Diseño de la investigación

La metodología implementada para el desarrollo de esta investigación es un estudio de caso, ya que está centrada en obtener información de la realidad de los sujetos, por medio del estudio y análisis de los comportamientos que contribuyen al análisis de la problemática de los fenómenos investigativos. Según Stake (como se citó en Álvarez y San Fabián, 2012), esta se define como el estudio de la particularidad, así como de la complejidad de un caso singular, para comprender su actividad en determinadas circunstancias de desarrollo. De este modo se facilitará el proceso de obtener la información con relación a los errores que los estudiantes están presentando en la resolución de ecuaciones de primer grado para posteriormente identificarlos y clasificarlos. La investigación se desarrolla en tres fases según Álvarez y San Fabián (2012):

Fase preactiva

En esta fase, para obtener la información que permita identificar y analizar el aprendizaje y manejo de la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de noveno grado, se utiliza la observación no participativa, donde el instrumento empleado es la aplicación de una prueba diagnóstica que permite la recolección de esta información.

Fase interactiva

Posterior a la recolección de los datos anteriores, se procede a hacer uso de la observación de patrones de comportamiento de los estudiantes al momento de enfrentarse a la resolución de problemas. Esto a través del diario de campo donde estarán plasmadas las características observadas en el proceso de observación, donde se puedan detallar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica.

Fase postactiva

En esta fase se tiene en cuenta la matriz de resultados obtenidos en las pruebas y las observaciones plasmadas en el diario de campo, y se hace una comparación de dichos resultados para facilitar el análisis y la clasificación de los errores encontrados en los estudiantes.

Población y muestra

La población seleccionada para el desarrollo de esta investigación fueron estudiantes de básica secundaria, particularmente estudiantes de noveno grado de la Escuela Normal Superior Del Distrito de Barranquilla. De ahí la muestra seleccionada se tomó bajo los criterios de selección de muestra para investigaciones cualitativas propuesta por Hernández Sampieri (2014).

La muestra seleccionada es de tipo convivencial o intencional, es decir, se seleccionan individuos a criterios acorde con las necesidades de la investigación, en este caso, estudiantes con mejor desempeño académico en el área de matemáticas en noveno grado. Teniendo en cuenta que el diseño de la investigación se trata de un estudio de caso, Cepeda (como se citó en Castro Monge, 2010) hace una clasificación de distintos tipos de estudios de casos de acuerdo con el enfoque de la investigación. Se plantea que se deben analizar una o pocas entidades (personas, grupos u organizaciones) y se deben centrar en situaciones actuales. Al tratarse de una muestra intencional y en concordancia con lo que Cepeda plantea, se seleccionan tres estudiantes del grado noveno, entre hombres y mujeres que cumplan con la característica de haber mostrado mejor rendimiento académico en el área de matemáticas en el último año, además, que hayan mostrado una participación activa en el desarrollo de las actividades del área. Esta información fue suministrada por el docente a cargo.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

En el presente trabajo se pretende recolectar información que permita hacer un análisis de los errores que los estudiantes cometen en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado; es por esto que se emplean distintas técnicas e instrumentos que permitan la recolección de estos datos, las cuales son: observación de tipo no participante según los criterios de Rodríguez (2005), la cual mediante una observación directa permitirá al investigador obtener datos o información sin tener ninguna función interactiva con los sujetos de la investigación (Rodríguez, 2005), es decir, el investigador se limita solo a observar sin hacer ningún tipo de intervención en las acciones que realicen los sujetos.

La prueba diagnóstica, según Santos (como se citó en Ministerio de Educación Pública, 2010), se utiliza con el fin de recolectar los datos necesarios que permitan analizar los errores que los estudiantes cometen a la hora de resolver ecuaciones de primer grado. A través de ella se analizan los procesos que los estudiantes manejan y el dominio del lenguaje algebraico a la hora de enfrentarse a situaciones problemas en álgebra. Esta fue elaborada por las investigadoras y sometida a un juicio de experto para comprobar su validez y que esta facilite el cumplimiento de los objetivos planteados en esta investigación.

La prueba consta de dos ítems: el primero de ellos diseñado con tres puntos nombrados a, b y c, los cuales corresponden a ecuaciones de primer grado que los estudiantes deberán darle solución. Luego el segundo ítem contiene dos situaciones problemas, donde se espera que los estudiantes puedan plantear una ecuación y luego solucionarla para darle respuesta a dicho problema. Los estudiantes cuentan con un tiempo de 60 minutos in ayuda ni intervención de las investigadoras.

Se realiza un análisis de contenido según Porta y Silva (2003), los cuales lo definen como una técnica de investigación que permite realizar inferencias válidas aplicadas a un contexto para obtener información. En este caso se analiza un libro de texto que el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2012) propone como guía para estudiantes y maestros, bajo el programa de secundaria activa en el grado noveno en el área de matemáticas.

Técnicas de análisis de datos

Para el análisis de la información recolectada se empleó el diseño de un diario de campo según los criterios de Bonilla y Rodríguez (como se citó en Martínez, 2007), para quienes

el diario de campo debe permitirle al investigador un monitoreo permanente del proceso de observación. Puede ser especialmente útil [...] al investigador en él se toma nota de aspectos que considere importantes para organizar, analizar e interpretar la información que está recogiendo (p. 77).

En consideración a lo anterior, en este diario de campo se consignaron todos los datos que brindó la observación, como los patrones de conducta, expresiones y gestos que los estudiantes mostraron al momento de ser sometidos a la prueba diagnóstica.

Para realizar la clasificación de los errores que los estudiantes cometen se utilizó una matriz de clasificación de la información (tabla 1), según los criterios Lofland y Lofland (1995), el cual afirma que “las matrices son útiles para establecer vinculaciones entre categorías o temas. Las categorías y/o temas se colocan en columnas o como renglones o filas. En cada celda el investigador deberá plasmar si las categorías o temas se relacionan o no” (p. 200). Se tomaron como categorías los errores que Socas *et al.* (2008) clasifican y los errores que los estudiantes cometieron en la resolución de los problemas de la prueba diagnóstica.

La matriz consta de cinco columnas y cuatro filas. En la parte superior de las columnas se encuentran los errores que Socas *et al.* (2008) proponen, y en cada fila se encuentran los errores que los estudiantes cometieron en el desarrollo de la prueba. La clasificación de estos errores corresponde a los datos arrojados en el análisis de los resultados.

Por último, se realizó una triangulación de la información según los criterios de Okuda y Gómez (2005), los cuales afirman que consiste en la verificación y la comparación de la información obtenida en diferentes momentos mediante distintas técnicas de investigación. Lo anterior no solo para validar la información, sino para profundizar su comprensión teniendo en cuenta que es necesario que las técnicas usadas durante la interpretación del fenómeno de investigación sean de corte cualitativo para que estas sean comparables. En este caso, se trianguló la información o datos obtenidos durante la observación, la prueba diagnóstica y el análisis de contenido, la cual estará plasmada

en una tabla (tabla 2) que contiene los datos más relevantes obtenidos en cada técnica y a su vez la comparación entre estos datos.

Resultados

Los estudiantes de noveno grado al momento de solucionar ecuaciones de primer grado cometen distintos errores, los cuales están ligados a dificultades en su aprendizaje significativo.

Se identificaron distintos tipos de errores que cometieron los estudiantes los cuales procedían de causas diferentes. Estos errores hallados fueron organizados según la clasificación de Socas *et al.* (2008), dentro de los cuales se evidenciaron errores que tienen su origen en un obstáculo, al igual que los errores que tienen su origen en la ausencia del sentido. También, se desprenden errores que tienen origen en la aritmética, errores de procedimiento, errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico.

Estos errores hallados también se relacionan con los errores clasificados por Radatz (1979). Estos son errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento, errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos, conceptos de requisitos previos, errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes y errores debidos a las dificultades del lenguaje.

Errores que tienen su origen en un obstáculo

De acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica que fue aplicada a los tres estudiantes de la muestra se encontró que dos de los estudiantes presentan errores que tienen su origen en un obstáculo. Dentro de la prueba aplicada se encontraba un ítem que constaba de una situación problema. Se pretendía con esto mirar cómo los estudiantes manejaban el lenguaje algebraico y algunos de los procedimientos necesarios para resolver este tipo de problemas.

El estudiante número 1 y el estudiante número 3, en el problema “averigua la edad de Clara, sabiendo que al añadirle su mitad obtenemos la edad de Juan que tiene 21 años”, optaron por realizar operaciones aritméticas acompañadas de un razonamiento mental, llegando así a la solución sin justificarla (figura 1). Este aborda el problema omitiendo las condiciones fundamentales de él (plantear una ecuación). Al hacer operaciones mentales junto con

operaciones aritméticas se evidencian operaciones cognitivas que se han generalizado al hacer tareas matemáticas. Los estudiantes no son capaces de asimilar información nueva debido a la rigidez habitual de su pensamiento o, como lo clasifica Radatz (1979), errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento.

Figura 1. Resolución del estudiante #1 al problema a del ítem 2.

Handwritten work for item 2 showing a division problem $21 \div 7 = 3$ and a handwritten note: "2/ (loira tiene 14 años, ya que al añadir a 14, la mitad de este, 7, nos da 21,".

Fuente: resultado prueba diagnóstica.

Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido

Estos errores se clasifican en errores del álgebra que tienen origen en la aritmética, errores de procedimiento y los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico. En esta investigación, a través de los datos recogidos en la prueba diagnóstica, se observaron ejemplos de cada uno de estos errores, siendo los errores de procedimiento y los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico los más repetitivos en cada caso.

En la prueba diagnóstica se presentó un primer ítem que constaba de tres puntos, los cuales eran ecuaciones que los estudiantes debían responder.

En la primera ecuación " $2x - 1 = 5x + 8$ " el estudiante número 1 realizó una suma de términos no semejantes llegando a una respuesta incorrecta de la ecuación (figura 2), donde hace mal uso de una regla conocida dentro de la clasificación de Radatz (1979). Este error corresponde a errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. En este ejercicio el estudiante opera cada expresión de forma aritmética, no teniendo en cuenta si se trata de términos semejantes que cumplen propiedades o reglas distintas en el álgebra. En este punto, el estudiante número 2 no comete ningún error visible al igual que el estudiante número 3.

Figura 2. Solución del estudiante #1 a la ecuación a del ítem 1.

Handwritten work for item 1, equation a showing an incorrect solution: $2x - 1 = 5x + 8$, $2x + 5x + 8 - 1$, $7x + 7$, $14x$.

Fuente: resultado prueba diagnóstica.

En la segunda ecuación de la prueba " $3 + 3x - 1 = x + 2 + 2x$ " (figura 3) se observaron errores tales como no manejar los inversos aditivos. Este error fue cometido por el estudiante número 1 ya que este realiza las operaciones omitiendo el cambio de signos en las expresiones que componen la ecuación.

El estudiante número 2, para resolver esta ecuación, mostró que no maneja el concepto de elemento nulo en la multiplicación; por otra parte, el estudiante número 3, al igual que el estudiante número 1, comete errores aplicando los inversos aditivos. Además, este comete errores con relación a las operaciones aritméticas (suma y resta de enteros), lo cual lo llevó a obtener un mal resultado del ejercicio.

Figura 3. Solución del estudiante #2 a la ecuación b del ítem 1.

Handwritten work for item 1, equation b showing an incorrect solution: $3 + 3x - 1 = x + 2 + 2x$, $3 - 2 + 3x - 1 = x + 2x$, $3 - 2 - 1 = x + 2x - 3x$, $0 = 0x$, $x = 0$.

Fuente: resultado prueba diagnóstica.

Para la tercera ecuación del ítem uno de la prueba " $-2(3x - 2) = -2$ " (figura 4), el estudiante número 1 mostró poco dominio en propiedades básicas de la aritmética como lo es la propiedad distributiva, ya que este al momento de resolver el problema opera los términos dentro del paréntesis como

términos semejantes omitiendo el factor “-2” que acompaña la expresión. Este error lo podemos clasificar dentro de los clasificados por Radatz (1979) como errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Figura 4. Solución estudiante #3 a la ecuación c del ítem 1.

$$-2 (3x - 2) = -2$$

$$-2 \cdot x = -2$$

$$x = (-2) + 2$$

$$x = 0$$

Fuente: resultado prueba diagnóstica.

El estudiante número 2 convierte la operación en una suma de números enteros en las expresiones que se encuentran dentro del paréntesis, junto con el factor “-2” que se encuentra multiplicándolo. Esto se debe a que confunde el producto de dos números con la suma de dos números, conceptos propios de la aritmética, los cuales al no ser superados y aprendidos de forma correcta pasan a temáticas posteriores como el álgebra. Se puede observar además en el estudiante que no tiene manejo y dominio de las diferentes reglas de los signos propias de cada operación con enteros. Para este caso, el estudiante número 3 no maneja las propiedades fundamentales de las operaciones, como es el caso de la propiedad distributiva.

Para el ítem 2 de la prueba que constaba de 2 situaciones problema, se presentó una generalidad en los tres estudiantes, ya que estos no fueron capaces de pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico. En algunos casos se limitaron a hacer operaciones mentales, y no fueron capaces de plantear una ecuación apropiada para dar solución a estos problemas.

Por otro lado, se realizó un análisis de contenido con el fin de entender posibles causas de los errores que cometen los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado. En este caso se analizó el libro que el MEN propone como guía para estudiantes y docentes en el área de matemáticas en noveno grado. A continuación, se muestran algunas de las características más importantes encontradas en este análisis.

Como primera observación realizada, el libro plantea el concepto de una ecuación (figura 5) dando ejemplos particularizados en distintos conjuntos numéricos (enteros, racionales e irracionales), pero este no desarrolla la forma general de la ecuación “ $ax+b=c$ ”, generando así que los estudiantes desconozcan la formalidad matemática de las ecuaciones y a su vez conduce a que el estudiante no maneje un lenguaje algebraico adecuado. Por lo tanto, se pueden producir los errores en álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico (Socas *et al.*, 2008).

Figura 5. No muestra una estructura general de la ecuación.

Conceptualización

Ecuaciones: una ecuación es una igualdad que tiene una o más cantidades desconocidas, llamadas incógnitas:

Por ejemplo expresiones como:

$$4x - \frac{3}{5} = 6 \quad ; \quad 3y - 6x = 4 \quad ; \quad \sqrt{2x+3} = 1$$

Fuente: libro *Secundaria activa: matemáticas noveno grado* (2012, p. 43).

En la explicación que ofrece el texto sobre la solución del problema que se plantea en la figura 6 se comete un error al sugerir que es más fácil tener la incógnita del lado izquierdo de la igualdad, ya que esto puede generar un obstáculo en los estudiantes, creando generalidades en los procesos mentales que estos manejan. Dichas generalidades dificultan el razonamiento al enfrentarse a problemas con distintas condiciones y una estructura diferente, por ejemplo, en este caso se plantea que $v = \frac{1}{3}Bh$. Si los estudiantes entienden esto como una generalidad, donde la incógnita siempre está del lado izquierdo de la igualdad, al escribir esta misma expresión de esta manera $\frac{1}{3}Bh = v$ el estudiante lo verá como algo diferente y no sabrá qué procedimiento debe seguir para la solución de esta ecuación. Este obstáculo es generador de errores con origen en un obstáculo según Socas *et al.* (2008).

De igual manera, se observaron en el texto errores tales como errores de transcripción los cuales pueden incidir en que los estudiantes presenten déficit en el aprendizaje de la temática de ecuaciones de primer grado.

Figura 6. La descripción del ejemplo hace generalidades no oportunas para la resolución.

Taller: Pensar para despejar
 Con dos de tus compañeros comparte las cuestiones propuestas aquí:

En el dibujo se representa un cono y un cilindro que tienen la misma altura h y sus bases son de igual área, B . Por los conocimientos que ya tienes, sabes que sería necesario verter tres conos de agua para llenar el cilindro.

Esto lleva a la expresión:



$$V = \frac{1}{3} Bh$$

Formula un problema en el cual el valor desconocido sea el área de la base de un cono.
 A partir de la expresión para el volumen encuentra una expresión para B .
 En cada paso asegúrate de por qué lo haces.
 En general es más fácil tener en el miembro izquierdo de la igualdad la variable que se va a despejar, entonces podrías comenzar por conmutar los miembros de la igualdad.

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

Continúa hasta obtener otra igualdad en la cual el miembro izquierdo sea B . Ensayen una revisión conjunta y si tienen dificultades consulten al profesor.

Fuente: libro *Secundaria activa: matemáticas noveno grado* (2012, pp. 46-47).

Discusión

A continuación, se muestra una matriz de clasificación de la información (tabla 1) en la que se encuentran clasificados los errores cometidos por los estudiantes de la muestra en la resolución de la prueba diagnóstica. Las categorías a considerar son los errores clasificados por Socas *et al.* (2008), lo cual permite contrastar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica realizada.

Los errores encontrados también se relacionan con la clasificación de errores de Radatz (1979), el cual los clasifica como errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento, errores debidos a aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes, errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos de requisitos previos y errores debidos a dificultades de lenguaje.

Con respecto al ítem 1 de la prueba diagnóstica para la ecuación " $2x - 1 = 5x + 8$ ", el estudiante número 1 realizó

una suma de términos no semejantes lo cual se clasifica como un error que tiene su origen en la ausencia del sentido, específicamente como error de procedimiento (Socas *et al.*, 2008). Este error también se puede clasificar dentro de los errores debidos a aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes denominados por Radatz (1979).

Seguidamente, para la segunda ecuación de este ítem " $3 + 3x - 1 = x + 2 + 2x$ ", el estudiante número 1, al igual que el estudiante 3, no maneja los inversos aditivos, el cual corresponde a un error del álgebra que tiene su origen en la aritmética (Socas *et al.*, 2008) o, como lo denomina Radatz (1979), errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos de requisitos previos. El estudiante número 2 no maneja el concepto de elemento nulo en la multiplicación, el cual se puede clasificar como errores del álgebra que tiene su origen en la aritmética (Socas *et al.*, 2008). Este error también corresponde a los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos de requisitos previos.

Tabla 1. Matriz de clasificación de la información.

Estudiantes de la muestra	Errores que tienen su origen en un obstáculo	Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido		
		Errores que tienen origen en la aritmética	Errores de procedimiento	Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico
Estudiante #1	<ul style="list-style-type: none"> Realiza operaciones mentales y aritméticas para resolver problemas, omitiendo las condiciones fundamentales (plantear una ecuación). 	<ul style="list-style-type: none"> Confunde el doble de un número con la potencia cuadrada de un número. No maneja el concepto de potenciación. 	<ul style="list-style-type: none"> Opera con términos no semejantes. No maneja la regla de los recíprocos. No maneja la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (sustracción). 	<ul style="list-style-type: none"> Omite el uso del signo igual en la ecuación. No es capaz de pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico.
Estudiante #2	<ul style="list-style-type: none"> No presentó errores de este tipo. 	<ul style="list-style-type: none"> No maneja la propiedad del elemento nulo en la multiplicación. Confunde la suma de dos cantidades con el producto de dos cantidades. No domina las reglas de los signos en operaciones con números enteros. 	<ul style="list-style-type: none"> No se evidencia ningún error con esta característica. 	<ul style="list-style-type: none"> No es capaz de pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico.
Estudiante #3	<ul style="list-style-type: none"> Realiza operaciones mentales y aritméticas para resolver problemas, omitiendo las condiciones fundamentales (plantear una ecuación). 	<ul style="list-style-type: none"> No maneja las operaciones con números enteros (suma y resta). 	<ul style="list-style-type: none"> Aplica de manera inadecuada las reglas para la transposición de términos (inverso aditivo) en las ecuaciones. Mal uso de la propiedad distributiva. Opera términos no semejantes de forma inadecuada. Confunde el inverso aditivo con el inverso multiplicativo. 	<ul style="list-style-type: none"> No es capaz de pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Fuente: elaboración propia.

En la tercera parte del primer ítem, en la ecuación " $2(3x - 2) = -2$ ", el primer estudiante no maneja la propiedad distributiva al igual que el estudiante 3. Este tipo de error es clasificado como errores de procedimiento (Socas *et al.*, 2008) o, como lo denomina Radatz (1979), errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Por otro lado, el estudiante número 2 confunde el producto de dos números con la suma de dos números, lo cual se puede clasificar como errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética según la clasificación de Socas *et al.* (2008) o como errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos de requisitos previos (Radatz, 1979).

debidos a las características propias del lenguaje algebraico (Socas *et al.*, 2008), al igual que también se clasifica como errores debidos a las dificultades del lenguaje (Radatz, 1979).

Por otra parte, el estudiante número 1 y número 3 en el problema "Si Ana es 12 años menor que Eva y dentro de 7 años la edad de Eva es el doble de la edad de Ana, ¿Qué edad tiene Eva?" se limitaron a utilizar cálculos mentales, evidenciando operaciones cognitivas que se han generalizado. Eso se enmarca en los errores que tienen su origen en un obstáculo, según Socas *et al.* (2008) o como errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento, según Radatz (1979).

Para el segundo ítem de la prueba se presentó la generalidad de que los estudiantes de la muestra no fueron capaces de plantear una ecuación apropiada para resolver el ejercicio. Estos presentaban problemas para pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Este error se clasifica como errores

Ahora, con el fin de sistematizar las principales características de los errores cometidos por los estudiantes, se llevó a cabo la triangulación de los resultados obtenidos en la observación, prueba diagnóstica y análisis de contenido (tabla 2).

Tabla 2. Triangulación de la información.

Categorías	Observación	Prueba Diagnóstica	Análisis de contenido	Triangulación
Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado	<p>Los estudiantes en la resolución de los problemas tardaban en responder y realizaban comentarios que mostraban confusión sobre la solución de esta.</p> <p>Al inicio de la prueba diagnóstica un estudiante mostró entusiasmo al ser seleccionado, en cambio los otros dos estudiantes se mostraron intrigados y algo nerviosos.</p> <p>En el transcurso de la prueba los estudiantes acataron todas las indicaciones dadas para el desarrollo de esta.</p> <p>Los estudiantes que se mostraban más inseguros buscaban apoyo haciendo preguntas a los compañeros que realizaban la prueba junto con ellos.</p>	<p>Las respuestas de las preguntas enmarcadas a la resolución de situaciones problema con ecuaciones son erróneas en todos los casos estudiados.</p> <p>En la resolución de los problemas los estudiantes no establecen los procedimientos y las operaciones adecuadas.</p> <p>En la totalidad de casos confunden reglas de procedimiento y no saben operar términos semejantes.</p> <p>En la totalidad de los casos, los estudiantes no manejan el lenguaje algebraico, es decir, tienen problemas en pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Esto los lleva a cometer el mayor número de errores encontrados.</p>	<p>Los libros de textos no son totalmente claros en la resolución de los ejercicios que plantean, creando confusiones o vacíos conceptuales en los estudiantes.</p> <p>Los errores de transcripción de los libros de texto generan confusiones en los estudiantes ya que pueden entender de forma equivocada la temática y, por ende, afecta el aprendizaje de esta.</p> <p>Hacer generalidades en los textos crea obstáculos en los estudiantes, donde estos se acostumbran a realizar procedimientos de una sola forma y se les hace difícil entender cuando se les presenta de una forma distinta.</p>	<p>Los datos arrojados por las técnicas utilizadas muestran similitud en los déficits que presentan los estudiantes en la resolución de problemas, y las causas que pueden incidir en los errores que cometen.</p> <p>Tales datos no se contradicen. Estos tienen una tendencia a la misma información, por lo cual los errores que cometen los estudiantes no solo están influenciados por los conocimientos adquiridos en su vida escolar sino también por los textos guías recomendados por el MEN, debido a las falencias que en ellos se encuentran.</p>

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

Con respecto al objetivo general planteado en este estudio de caso, se logró hacer el análisis de los errores que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado. Se evidencian errores frecuentes como son errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico, errores que tienen su origen en la ausencia del sentido, de donde se derivan errores que tienen origen en la aritmética y errores de procedimiento. De manera menos frecuente se observan errores que tienen su origen en un obstáculo.

Dentro de los errores más comunes encontrados en los estudiantes al momento de resolver la prueba diagnóstica está el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Este error se clasifica dentro del grupo de los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. En este caso, los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico se evidenciaron en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado, pero el problema trasciende al aplicar propiedades y reglas, al no comprender conceptos, entre otros. Por lo tanto, los estudiantes obtienen malos resultados de aprendizajes.

Seguidamente, los errores que tienen origen en la aritmética cometidos por los estudiantes demuestran que existen falencias desde cursos anteriores, donde estos vienen recibiendo una formación que pasa por alto los errores o el conocimiento no adquirido; lo cual ha generado que el estudiante al recibir temáticas posteriores o al tratar de hacer nuevas tareas matemáticas que necesitan manejar conocimientos previos, como en este caso la resolución de ecuaciones de primer grado, llevan consigo falencias que generan nuevos errores y el conocimiento nuevo.

Por otro lado, dos de los estudiantes evidenciaron errores que tienen origen en un obstáculo, según la categorización de Socas. Es decir, poseen la operación cognitiva de emplear el cálculo mental y las operaciones básicas, omitiendo las condiciones fundamentales para resolver los problemas planteados. Los estudiantes recurren a utilizar la operación cognitiva que habitualmente usan, la cual no es adecuada para dar solución a los problemas que están abordando. Estos estudiantes no tienen la capacidad de procesar la nueva información dado que encuentran alguna relación o algún aspecto de las informaciones anteriores.

En síntesis, con este trabajo se logró realizar una clasificación de los errores más comunes encontrados en la aplicación de

la prueba diagnóstica. En esta clasificación se evidenció que uno de los errores más comunes es, según la clasificación de Socas, los errores de procedimiento, los cuales son propios de los errores que tienen su origen en la ausencia de sentido. En los tres casos (estudiante #1, #2 y #3) hubo errores de este tipo, donde los estudiantes poseen la noción de las propiedades, pero cometen errores a la hora de aplicar las reglas de procedimiento. Así mismo, mediante un análisis de textos se detallaron factores que generan déficits en el aprendizaje de los estudiantes, siendo esto un causante de posibles errores. Esto se debe a que los libros omiten información de las temáticas, generando que los conceptos y procedimientos no sean comprensibles para los estudiantes, lo cual se hizo evidente en el libro analizado. En la temática de ecuaciones de primer grado este no muestra de forma explícita los procedimientos que se abordan en la resolución de las ecuaciones planteadas como ejemplos.

Declaración de Conflictos de Intereses

No se tiene ningún conflicto de interés entre los autores de este artículo.

Referencias Bibliográficas

- Álvarez, C. y San Fabián, J. (2012). La elección del Estudio de Caso en la investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, 28(1), 1-12.
- Barría, B. A. y Chavarría, L. M. (2010). *Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado* (Tesis de pregrado). Universidad del Bío-Bío, Chile.
- Castaño, C. y Quecedo, R. (2003). Introducción a la metodología de la investigación Cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, (14), 5-40.
- Castro Monge, E. (2010). El estudio de caso como metodología de la investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de Administración*, 1(2), 31-54.
- De Moreno, I. y De Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado. *Revista EMA*, 2(3), 247-258.
- Franchi, L. y Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educare*, 8(24), 63-71.
- García Suárez, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. (2011). Errores y dificultades de estudiantes universitarios de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L.

- Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. M. Palarea, A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 145-155). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación*. (6ta edición). México: Mc Graw Hill Education.
- Lofland, J. y Lofland, L. (1995). *Analyzing Social Settings: A Guide to Qualitative Observation and Analysis Sociology Series*. California: Universidad de California.
- Martínez, L. (2007). La observación y el diario de campo en la definición de un tema de investigación. *Perfiles Libertadores*, 4(80), 73-80.
- Ministerio de Educación Nacional. (2012). *Secundaria Activa, Matemática Grado Noveno*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Pública. (2010). *Evaluación diagnóstica*. Recuperado de <http://es.calameo.com>
- Okuda, M. y Gómez, C. (2005). Métodos de investigación cualitativa: triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 34(1), 118-124.
- Porta, L. y Silva, M. (2003). *La investigación cualitativa: El análisis de contenido en la investigación educativa*. Mar de Plata, Argentina: Universidad de Mar de Plata.
- Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 162-172. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/748804>
- Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori Editorial. SL.
- Rodríguez, E. (2005). *Metodología de la investigación*. (5ta edición). México: Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Recuperado de http://www.academia.edu/37714580/Metodolog%C3%ADa_de_la_investigaci%C3%B3n_Ernesto_A._Rodr%C3%ADguez_Moguel_LIBROSVIRTUAL
- Socas, M., Hernández, J. y Camacho, M. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado* (32), 73-86.
- Socas, M., Ruano, R. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.

Para citar este artículo: Tettay-Mejía, S., Pulgar-García, M. y Rojas-Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis*, 15(2), 193-205. Doi: <http://dx.doi.org/10.21676/23897856.3249>